

Dispersión y Estabilidad en el proceso de modelado en Full Wave Inversion para un medio visco-acustico en el dominio de la frecuencia en dos dimensiones

Miguel Angel Ospina Pabon

Estudiante de Maestría en Matemáticas

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de Magíster en Matemáticas

Asesor: Dr. Carlos Cesar Piedrahita

Doctor en Matemáticas

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad de Medellín

Co-Asesor: Dr. Hebert Montegranario

Doctor en Ciencias de la Computación

Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia

Para mi madre .

Índice general

1. Tomografía y el Problema Geofísico	11
1.1. Modelado	11
1.1.1. Soluciones Analíticas para Helmholtz	14
1.1.2. Condiciones De Frontera	15
1.2. Full Wave Inversion	17
2. Esquema Óptimo para Solución de la Ecuación de Onda Visco-Acústica	21
2.1. Esquema Óptimo de 9 puntos	22
2.1.1. Discretización del Laplaciano	23
2.1.2. Discretización del término Lumped-Mass	24
2.2. Consistencia del Esquema	25
2.3. Dispersión Numérica	28
2.4. Estrategia para obtención de Parámetros Óptimos m_i	30
2.5. Descripción Código	34
2.6. Resultados y Comparaciones	35
2.6.1. Análisis de Dispersión Numérica	35
2.6.2. Comparaciones Numéricas	39
3. Modelado para la Ecuación Visco-Acústica 2D en el dominio de las frecuencias	45

3.1. Discretización	46
3.1.1. Discretización en Malla Intercalada Usual	47
3.1.2. Discretización en Malla Intercala Rotada	48
3.1.3. Discretización del término Lumped Mass	51
3.1.4. Problema Inverso para la Discretización	51
3.1.5. Ejemplos	54
3.2. Estabilidad	56
4. Conclusiones	65
A. Diferencias Finitas	67
A.0.1. Teoremas de Taylor	67
A.0.2. Aproximaciones Por Diferencias Finitas	69
B. Problemas Inversos	73
B.1. Estabilidad de un Sistema Lineal y Precondicionamiento	75
B.1.1. Número de Condición	77
B.1.2. Precondicionamiento	80

Índice de figuras

1. Proceso de Adquisición Sísmica mediante la propagación de ondas. Imagen de https://sismicidad.wikispaces.com/Sismicidad+generalidades .	4
1.1. Configuración de Frontera PML.	17
2.1. Esquema de Óptimo de 9 puntos	24
2.2. Velocidad Fase Normalizada v_r/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, para diferentes ángulos de propagación. Fijando en cada gráfica $1/G_i$ y variando $1/G_r$	37
2.3. Velocidad de Atenuación Normalizada v_i/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, para diferentes ángulos de propagación. Fijando en cada gráfica $1/G_r$ y variando $1/G_i$	38
2.4. Velocidad de propagación Normalizada v_r/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, variando $1/G_r$ y $1/G_i$. Para diferentes ángulos de propagación	40
2.5. Velocidad de Atenuación Normalizada v_i/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, variando $1/G_r$ y $1/G_i$. Para diferentes ángulos de propagación	41

2.6. Comparación numérica entre la solución analítica a Helmholtz no homogéneo, el esquema de 5 puntos y 9 puntos para diferentes números de onda, graficando el dominio en x vs la amplitud normalizada.	44
3.1. Representación de Fronteras PML en un dominio de 2D.	55
3.2. Modelos de velocidad 1, 2 y 3 respectivamente en km/s	58
3.3. Número de condición para el modelo 1	60
3.4. Número de condición para el modelo 2	61
3.5. Número de condición para el modelo 3	62

Agradecimientos

Un gran agradecimiento a mi hermano Juan Guillermo, mi madre Maria Aracelly por el grandisimo apoyo dado durante esta larga lucha y Laura Isabel por su gran comprensión y soporte.

Este trabajo no hubiera sido posible si la ayuda de muchas personas e entidades. Principalmente agradezco a Sheryl Avendaño por su apoyo la parte física y computacional, su ayuda fue fundamental para el entendimiento de la problemática a desarrollar y al Profesor Juan Carlos Muñoz del Instituto de Física de la Universidad de Antioquia por la orientación brindada durante este último año, fue de gran importancia. Al Profesor Carlos Piedrahita por su apoyo durante todo el proceso de estudio y en general a los integrantes del grupo de Inversión y Tomografía Sísmica que me ayudaron de una u otra manera.

De igual manera a todo esos profesores que durante el proceso aportaron a mi formación y a este trabajo de grado, a mis compañero de posgrado que hicieron mas ameno la estadía en la unviersidad.

Este trabajo fue financiado por la compañía Colombiana del petroleo ECOPETROL y COLCIENCIAS como parte del proyecto de investigación No 0266-2013.

Introducción

La exploración sísmica es un problema que data de finales del siglo XIX. Este problema consiste en obtener información de la corteza terrestre, con el fin de inferir propiedades y composición de esta, yacimientos de petróleo, de gas, etc. Una manera de obtener esta información es hacer perforaciones, las cuales tienen un alto costo económico. Por tanto, se han diseñado nuevas estrategias para poder adquirir la información de interés sobre la corteza terrestre.

Una de las técnicas principales para adquirir información valiosa sobre el subsuelo terrestre es producir ondas sísmicas artificiales para que éstas se propaguen a través del subsuelo. Estas ondas son generadas normalmente por explosiones, impactos mecánicos o vibraciones. Posteriormente, las respuestas producidas por las ondas (reflexiones y/o refracciones) son detectadas y registradas por una serie de estaciones receptoras conocidas como geófonos e hidrófonos en el caso marino. A partir del estudio de los datos registrados, sean amplitudes y/o tiempos de viaje, se consiguen imágenes del subsuelo que luego se relacionan con las capas geológicas, secciones sísmicas, campos de velocidades, etc.

Desde 1845 se han desarrollado distintas teorías, métodos y técnicas para mejorar la adquisición y el procesamiento de los datos obtenidos mediante generación de onda sísmicas, cuyo objetivo es caracterizar una zona de

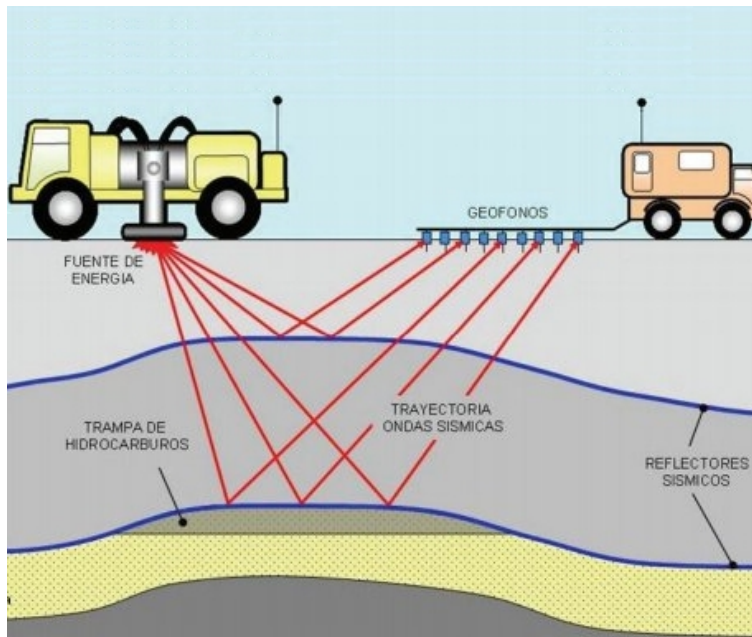


Figura 1: Proceso de Adquisición Sísmica mediante la propagación de ondas. Imagen de <https://sismicidad.wikispaces.com/Sismicidad+generalidades>.

interés usando estos datos finales. El procesamiento adecuado de estos datos permite deducir parámetros que influyen en los valores que hemos detectado y que corresponden a propiedades del medio a través del cual se han propagado las ondas, tales como la velocidad, la densidad, la permitividad, etc.

La tomografía sísmica es una de las principales técnicas de reconstrucción de estas propiedades físicas que afectan la propagación de las ondas sísmicas, el término tomografía proviene del griego tomos, que significa rebanada”. La base matemática para la tomografía se puede atribuir a Johann Radon en 1917. El primer uso de la tomografía sísmica se propuso en la tesis doctoral de Reagan [1978] y luego se planteó el uso de reconstrucción tomográfica en los datos de sísmica de pozos, convirtiéndose en un herramienta fundamental de la sismología moderna.

Actualmente para reconstruir esta imagen mediante la tomografía sísmica se siguen 4 etapas:

1. **Adquisición:** En esta fase se da la obtención de los datos de la onda propagada, ya se amplitudes o tiempos de viajes.
2. **Modelamiento:** Consiste en representar la propagación de la onda mediante una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que depende de las propiedades del medio como lo son densidad, permitividad, entre otros y características de la onda como lo es la velocidad. Posteriormente mediante una herramienta matemática resolver esta ecuación
3. **Inversion:** La Ecuación Diferencial que modela la propagación de la onda depende de propiedades desconocidas inicialmente como la velocidad de propagación de la onda, la densidad del medio, etc. Entonces para obtener una solución de la EDP que represente la propagación de la onda en un medio dado, debemos obtener estos valores. Una técnica usada actualmente para este fin se conoce como *Full Wave Inversion* (FWI). Este técnica consiste en minimizar una función que depende de las propiedades del medio y la propagación de la onda modela en la etapa anterior.
4. **Migración:** Con los datos anteriores obtenidos mediante FWI se reconstruye la imagen del subsuelo mediante la retropropagación del campo de onda.

Nuestro trabajo se centrara en la parte de modelamiento en pro de tener un proceso de Full Wave Inversion mas cercano al valor óptimo y estable.

La Ecuación Diferencial Parcial que describe la propagación de una onda es

conocida como la ecuación de onda. Para esta ecuación existen diferentes versiones dependiendo del medio donde se propaga y del dominio en que se encuentra. Por ejemplo, cuando la ecuación de onda esta en el dominio temporal y el medio es no dispersivo, es decir, la velocidad de propagación coincide con la velocidad del sonido, la ecuación de onda viene dada por la expresión:

$$S(\mathbf{x}, t) = c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde S es la fuente que genera la onda, c la velocidad de la onda y u es el campo de desplazamiento. Cuando se le aplica transformada de Fourier a la ecuación de onda en el dominio temporal, se obtiene una ecuación de onda en el dominio de las frecuencias que coincide con al ecuación de Helmholtz:

$$S(\mathbf{x}, \omega) = \Delta u(\mathbf{x}, \omega) - k^2 u(\mathbf{x}, \omega) \quad (2)$$

donde $k = \omega/c$ conocido como el número de onda, $\omega = 2\pi f$, donde f corresponde la frecuencia de la onda. Esta ecuación se deduce de la Ley de Hooke y Ley de Newton.

Cuando el medio donde se propaga la onda es dispersivo y con atenuación, es decir la onda posee pérdida de energía, por tanto su amplitud decae durante el desplazamiento y mas aún la velocidad no permanece constante se conoce como medio visco-acústico. El medio acústico y el medio visco-acústico difieren en la leyes de Newton y de Hooke en la representación del tensor de esfuerzos [3]. La ecuación que modela la propagación de una onda en un medio Visco-Acústico viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{\xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{K(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla \cdot \left(\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \right)$$

donde ξ corresponde a un función compleja que representa la atenuación del medio, ρ la densidad el medio, c la velocidad de propagación de la onda, P es el campo de presiones, F es la fuerza de las fuentes que genera la onda.

Esta será la Ecuación Diferencial Parcial que centraremos nuestro trabajo, tanto como su discretización ?? como su solución por diferentes métodos y que será expuesta como mas detalles en el capítulo 1.

En general para solucionar la Ecuación de onda en un medio Visco-Acústico ya que no se conoce solución analítica se recurre diferentes técnicas numéricas para solucionar Ecuaciones , como Diferencias Finitas, Elementos Finitos, Métodos Espectrales, entre otros. Todas estos métodos numéricos son aproximaciones y traen consigo errores numéricos debido a la naturaleza de estos.

Full Wave Inversion es una técnica introducida por Tarantola en 1987. FWI consiste en obtener valores de la velocidad, densidad, etc., que se ajusten los más cercano posible a los valores reales del dominio de estudio. Para recuperar este conjunto de valores, se propone una función a minimizar χ , vienes dada por la comparación de información experimental obtenida previamente, es decir, información dada sobre el dominio de interés e información calculada, que se obtiene de la etapa de modelado. χ esta se define de la siguiente forma:

$$\chi(\mathbf{m}) = \|d_{obs} - d_{cal}(\mathbf{m})\|,$$

donde d_{obs} es la información previa sobre nuestro medio y corresponde a las información medida del medio, $\mathbf{m} = (c(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}), \dots)$ es el conjunto de parámetros del que depende la EDP y $d_{cal}(\mathbf{m})$ se obtiene al solucionar la Ecuación Diferencial. Para minimizar esta función, ya que no es una función lineal, se utilizan diferentes métodos iterativos de minimización como Gradiente Conjugado, Método de Newton, entre otros [9].

Así para encontrar parámetros que representen los valores de la reali-

dad de medio de estudio necesitamos resolver la Ecuación de Onda en un medio Visco-Acústico, que exponemos en el capítulo 2, tantas veces como el método de minimización lo requiera, por tanto el método numérico usado para solucionar la EDP debe ser un método bien condicionado, es decir, con solución estable, única y además que la solución obtenida tenga mínima dispersión numérica y mínimo error numérico, puesto que estos errores se propagan tras cada iteración de la minimización.

Los métodos numéricos requieren algún tipo de discretización para representar el dominio físico. Para esta discretización es conveniente definir una extensión finita del dominio que viene limitado por unas condiciones de frontera llamadas *Absorbing Boundary Conditions* y un número finito de puntos de malla donde cada punto representa una coordenada espacial del dominio.

Las *Absorbing Boundary Conditions* son fronteras artificiales del dominio donde la amplitud de la onda decae rápidamente hasta anularse, así evitando reflexiones dentro de nuestro dominio de interés. Estas serán explicadas con detalles en la sección Condiciones de Frontera.

La discretización del dominio de interés introduce errores numéricos debido a que si no se toman la suficiente cantidad de puntos se tendrá pérdida de información, pero de incluir una gran cantidad de puntos sobre la malla aumenta en el costo computacional. Por esto se debe usar un método óptimo para solucionar que genere una dispersión numérica mínima, es decir, que nuestra solución sea lo más cercana posible a la real y sin desfases. Una manera de controlar la dispersión en manejar un número adecuado de puntos por longitud de onda de la propagación así tener una buena solución. Para lograr una dispersión numérica mínima usaremos una mejora del esquema introducido por Churl-Hyun Jo en 1996 llamado esquema óptimo de 9 puntos

en Diferencias Finitas en el dominio de las frecuencia para la ecuación de Helmholtz acústica, es decir donde el valor del número de onda k es real. La mejora viene del hecho que si el número de onda k es un valor complejo, este introduce una atenuación en el dominio de estudio [3], entonces para optimizar la solución usamos un número de onda complejo a diferencia de Jo que usó un valor real.

Este esquema de Jo utiliza una combinación entre el esquema de Diferencias Finitas de segundo orden para el Laplaciano de la ecuación de Helmholtz, la rotación del plano para obtener otra aproximación del Laplaciano y una aproximación para el término $\tilde{k}u$ conocido en la literatura como *Lumped Mass* para obtener una solución óptima para la Ecuación de Helmholtz [12]. Esta nueva discretización queda en función de unos parámetros que dependiendo de sus valores harán la dispersión numérica sea mínima. En el capítulo 2 mostraremos cómo se construye este esquema, la consistencia del esquema, una estrategia para obtener dichos parámetros óptimos y comparaciones con otras soluciones para la ecuación de Helmholtz en el caso No Homogéneo. Esta aproximación optimiza el tiempo de computo debido a que se necesitan menos puntos de malla por longitud de onda (*grid point number*) como mostraremos en las comparaciones.

Para obtener la solución a la EDP que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico, usamos el esquema de Jo mejorado en el capítulo 2 y posteriormente se transforma la discretización en un problema inverso, es decir, de la forma $Ap = F$ donde A es una matriz *sparse* que depende de la discretización, p es la solución a encontrar y F es la discretización de la fuente. Antes de solucionar el sistema $Ap = F$, debemos analizar si la matriz A es bien condicional o no, es decir, si tiene solución, si tal solución es única y si es estable la solución. Para que tenga solución única es equivalente

a que A sea invertible y que el sistema sea estable, es decir, que el número de condición de A sea pequeño. Todas estas propiedades para nuestra solución se muestran en el capítulo 3.

En el capítulo 3 mostraremos que el número de condición varía según la frecuencia y el tamaño del dominio para diferentes modelos de velocidad y además este número de condición es muy alto, del orden de 10^5 por lo que requiere realizar una técnica conocida como preconditionamiento, que consiste en multiplicar por una matriz M^{-1} de tal forma que $M^{-1}A$ tenga un menor número de condición.

Capítulo 1

Tomografía y el Problema Geofísico

Una de las formas de obtener información del subsuelo es propagar una onda en el medio de estudio, para luego obtener información de la propagación y posteriormente del medio. La manera usual de modelar dicha propagación es mediante una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), que depende de las propiedades del medio tales, como la densidad, la atenuación, disipación de energía, entre otros y de igual manera de propiedades de la onda, como lo es principalmente la velocidad de propagación.

1.1. Modelado

La EDP que modela la propagación de una onda es conocida como la Ecuación de Onda. Cuando se aplica Transformada de Fourier al dominio del tiempo, se obtiene una EDP en el dominio de las frecuencias y esta ecuación se conoce como la Ecuación de Helmholtz. Dependiendo de la complicaciones del dominio o medio donde se propaga la onda, complejidades como perdida

de energía que corresponde a un medio con atenuación, velocidad variable, un medio dispersivo; la EDP que modela la propagación adquiere mayor complejidad matemática.

El medio que estudiaremos en este trabajo es un medio visco-acústico. Un medio visco-acústico es un dominio dispersivo donde la velocidad depende de la posición, es atenuado, es decir, la onda posee pérdidas de energía y por tanto amplitud, densidad variable en cada punto.

Para un medio visco-acústico existen diferentes planteamientos para la Ecuación de Helmholtz que representa la propagación de una onda en este dominio. Los principales planteamientos de la EDP que modela la propagación están en Operto y Virieux [20], Kamei and Pratt [15] y Carcione [28]. Usando el enfoque de Operto y Virieux, esta ecuación puede ser deducida mediante leyes que gobiernan la mecánica de la onda propagada en un medio visco-acústico, que son Ley de Hooke:

$$-p(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes M(\mathbf{x}, t)$$

y la Ley de Newton:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \gamma(\mathbf{x})\mathbf{v} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}),$$

donde p es el campo de presión de la onda propagada en el dominio del tiempo, γ es el inverso de la función de atenuación, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos, \mathbf{f} es la fuerza externa que genera la perturbación, M esta asociado al coeficiente Bulk que explicaremos mas adelante, ρ es la densidad del medio, \mathbf{v} es la velocidad de propagación de la onda, \mathbf{u} es campo de desplazamiento y \otimes es el operador de convolución. Aplicando Transformada de Fourier a las leyes anteriores en la variable temporal obtenemos la siguientes ecuaciones en el dominio de la frecuencia.

1.1. Modelado

1. Derivada temporal de la ley de Hooke

$$-i\omega P(\omega, \mathbf{x}) = M(\omega, \mathbf{x})\nabla \cdot \mathbf{V}(\omega, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

2. Ley de Newton

$$-i\omega \mathbf{V}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})}\nabla P(\omega, \mathbf{x}) + \frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})}\mathbf{F}(\omega, \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

donde

$$M(\omega, \mathbf{x}) = K(\mathbf{x})\alpha(\omega, \mathbf{x}) = K(\mathbf{x})\frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})}$$

$$\xi(\omega, \mathbf{x}) = 1 + i\frac{\gamma(\mathbf{x})}{\omega}$$

[4].

A partir de las ecuaciones 1.1 y 1.2 obtenemos la ecuación que gobierna la propagación de una onda en un medio visco-acústico en el dominio de la frecuencia en dos dimensiones.

Teorema 1.1. Ecuación de Onda en un medio Visco-Acústico en el Dominio de la Frecuencia.

Sea $P(\mathbf{x}, \omega)$ el campo de presiones de una Onda que se propaga en un medio Visco-Acústico entonces la Ecuación Diferencial Parcial que modela dicha propagación viene dada por:

$$\frac{1}{\xi(\mathbf{x}, \omega)}\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}, \omega)}\nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{K(\mathbf{x})}P(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})}\nabla \cdot \left(\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \right) \quad (1.3)$$

donde $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad del medio, $\xi(\mathbf{x}, \omega)$ es la atenuación que hace que la onda tenga pérdida de energía, esta función es compleja-valuada; $K(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})^2\rho(\mathbf{x})$ es el coeficiente de Bulk, $c(\mathbf{x})$ es la velocidad de propagación de la onda en el medio, \mathbf{F} es la fuente con la que se genera la onda y ∇ es el gradiente de una función [20].

De la ecuación anterior se puede deducir la Ecuación de Helmholtz. Tomando $\rho(\mathbf{x})$ y $c(\mathbf{x})$ como funciones constantes y $\xi(\mathbf{x}, \omega) = \xi(\omega)$ es decir, independiente de la posición obtenemos la ecuación de Helmholtz no homogénea para un medio acústico con atenuación.

Definición 1.1. Ecuación de Helmholtz

Definimos la Ecuación de Helmholtz no homogénea como:

$$\Delta P(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{k}^2 P(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (1.4)$$

y haciendo $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) = 0$, obtenemos la Ecuación de Helmholtz Homogénea.

A lo largo este trabajo tomaremos $\tilde{k} = k\xi(\omega)$, $k = \frac{\omega}{c}$ y $\xi(\omega) = 1 + \gamma/\omega$ donde γ depende de la atenuación del medio. Debido a que para la ecuación de Helmholtz no homogénea se conoce solución analítica, a partir de esta nos permitirá realizar comparaciones numéricas para el método que desarrollaremos en el capítulo 2

1.1.1. Soluciones Analíticas para Helmholtz

Para la Ecuación Diferencial Parcial que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias no se conoce solución analítica, por eso la solución se realiza mediante métodos numéricos, sin embargo para algunos casos particulares para esta ecuación se conocen soluciones analíticas. Del la EDP que modela la propagación de una onda en medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias se pueden deducir ecuaciones de gran relevancia como lo son la ecuación de Helmholtz en el caso homogéneo y no homogéneo, como se expuso en el capítulo 1. Las soluciones para estas ecuaciones vienen dadas por la siguientes expresiones:

1. **Ecuación de Helmholtz Homogénea:** Esta solución es conocida como

la solución de una onda plana y viene dada por la expresión

$$P(\mathbf{x}, \omega) = A(\omega)e^{-i(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})} \quad (1.5)$$

donde $A(\omega)$ es la amplitud de la onda y $\tilde{\mathbf{k}}$ el número de onda que corresponde a ω/c en el caso acústico.

2. **Ecuación de Helmholtz Inhomogénea:** La solución analítica para la ecuación de Helmholtz no homogénea viene dada en funciones de Hankel. Por definición estas funciones de Hankel son:

- Función de Hankel de primera especie.

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

- Función de Hankel de segunda especie.

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

Donde J_n y Y_n son funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente. Así a partir de las funciones de Hankel la solución de 1.4, la ecuación de Helmholtz no homogénea viene dada por:

$$P(\mathbf{x}, \omega) = i\pi H_0^{(2)}(\tilde{k}r)S(\mathbf{x}, \omega), \quad (1.6)$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ y (x_0, z_0) es la posición de la fuente [17].

1.1.2. Condiciones De Frontera

Cuando se restringe el dominio computacional únicamente a una sola parte del dominio físico de interés, para efectos de aumentar la eficiencia computacional se introducen defectos en las fronteras que no existen en la naturaleza física del fenómeno original. Si no se tratan adecuadamente estos defectos, pueden

introducir polución a la solución e introducir errores numéricos. Los métodos mas comunes usados en la tomografía para evitar estos errores es usar condiciones de frontera convenientes como: *Absorbing boundary conditions* ó *Absorbing boundary layer*.

Las *Absorbing boundary layer* consisten en introducir una región a lo largo de las fronteras artificiales donde la ecuación de onda se modifica de tal manera que la amplitud en esta región decae rápidamente hasta que valor de la función es igual a 0 en el borde exterior de la región de al frontera. Un tipo de estas fronteras son las *perfectly matched layer* (PML) como se muestra en la figura 1.1, introducidas por Bérenger (1994) originalmente utilizadas para ondas electromagnéticas, pero ampliamente usadas en variedad de fenómenos que envuelven propagación de ondas. Las PML produce un decaimiento exponencial de la amplitud en la región de la frontera.

Las PML se imponen en la ecuación visco-acústica 1.3 en la función ξ , modificando esta función en la región de la PML como se muestra en la figura 1.1, es decir, cuando se está en el interior del medio visco-acústico la función ξ viene dada por las propiedades del medio y cuando se está en la frontera PML esta funciones dependerán de una función ξ_x o ξ_z que depende solo de la posición en x o z dependiendo de la región. Las modificaciones vienen dadas por la expresión $\xi_x = 1 + i\gamma_x(x)/\omega$ y $\xi_z = 1 + i\gamma_z(z)/\omega$, donde las funciones $\gamma_x(x)$ y $\gamma_z(z)$ son funciones de decaimiento exponencial de tal manera que permita el rápido decaimiento de la amplitud, es decir, cuando la onda llega a estas regiones y \mathbf{L} es el grosor de la PML, como se ve en al figura 1.1.

Las función γ_x que usaremos en este trabajo para las PML esta dada por:

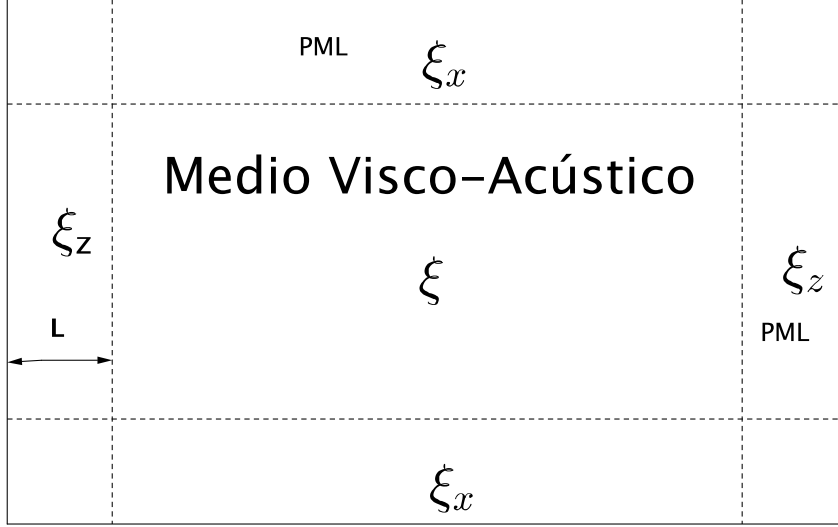


Figura 1.1: Configuración de Frontera PML.

$$\begin{aligned} \gamma_x(x) &= a \cos\left(\frac{x}{x_{pml}} \frac{\pi}{2}\right) && \text{para } x < x_{pml} \\ \gamma_x(x) &= a \left(1 - \cos\left(\frac{x - L_x - x_{pml}}{x_{pml}} \frac{\pi}{2}\right)\right) && \text{para } x > x_{pml} + L_x, \end{aligned}$$

donde x_{pml} es la longitud de la PML, L_x es la longitud de la región fuera de PML (el dominio de estudio) y el factor a es una constante que se determino mediante experimentación, obtuvimos que este valor esta relaciona con la frecuencia como mostraremos en el capítulo 3, de igual manera para el valor de L [20]. De igual manera se define esas funciones para γ_z .

1.2. Full Wave Inversion

Como observamos en la ecuación visco-acústica 1.3 depende de funciones como c que es la velocidad de la propagación de la onda, ξ la atenuación y ρ la

densidad. Para poder resolver dicha Ecuación por algún método matemático debemos obtener primero valores de dichas funciones. Para esto Tarantola en 1987 introduce una técnica llamada Full Wave Inversion (FWI). Para encontrar estos parámetros, FWI utiliza la teoría matemática de Problemas Inversos y Métodos Iterativos de Minimización [9].

Para llegar al objetivo deseado, es decir, obtener valores de c , ρ , entre otros, que representen una aproximación a los datos observados se propone un conjunto inicial de valores numéricos de de esta funciones. Con estos valores obtenemos una solución de la EDP que modela la propagación de la onda en un medio. Ya que la solución obtenida no es la esperada, solo es una aproximación, mediante técnica de métodos iterativos se minimiza una función de ajuste χ que compara la solución obtenida con información apriori de nuestro problema, proponiendo nuevos conjuntos de valores numéricos de los parámetros a partir de los anteriores de tal forma que la nueva solución obtenida con nuevos valores se ajuste mas a la realidad. Repitiendo cada vez el proceso hasta el punto de obtener una solución optima y lo mas acercada a la realidad.

Sea d_{obs} la información apriori sobre nuestro modelo que en general corresponde a los datos observados. Sea $\mathbf{m} = [m_1(\mathbf{x}), m_2(\mathbf{x}), \dots] = [c(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}), \dots]$, con $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$ donde \mathfrak{M} es el espacio de todos los posibles conjunto de valores de $c(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x})$, etc. Entonces podemos definir nuestra función $\chi(\mathbf{m})$

$$\chi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$\chi(\mathbf{m}) = \|d_{obs} - d_{cal}(\mathbf{m})\|, \quad (1.7)$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma inducida sobre el espacio de la soluciones, que por lo general viene dada por la norma L_2 .

1.2. Full Wave Inversion

Para encontrar un mínimo de χ se usan métodos iterativos. Comenzando de un posible modelo inicial \mathbf{m}_0 y construyendo de manera recurrente a partir de un modelo \mathbf{m}_i un nuevo modelo, \mathbf{m}_{i+1} de la siguiente manera:

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i + \gamma_i \mathbf{h}_i \text{ con } \chi(\mathbf{m}_{i+1}) < \chi(\mathbf{m}_i) \quad (1.8)$$

donde \mathbf{h}_i es la dirección del descenso y $\gamma_i > 0$ es la longitud del salto, estos dos valores dependen del método usado. Existen variedad de técnicas para obtener $\tilde{\mathbf{m}}$ que es el valor óptimo que ajusta mejor a las observaciones. Ya que la función es no lineal el valor de \mathbf{h}_i depende del gradiente de la función χ . Los métodos difieren en la manera de calcular este valor. Los métodos mas comunes usados son *Steepest Descent*, método de Newton, Gradiente Conjugado y Método Adjunto [9].

Capítulo 2

Esquema Óptimo para Solución de la Ecuación de Onda Visco-Acústica

Las Diferencias Finitas es uno de los métodos más usados en la Tomografía Sísmica y se obtiene a partir de los Teoremas de Taylor en sus versiones en una variable A.1 y varias variables A.2. Uno de los grandes inconvenientes de este método es la necesidad de utilizar aproximaciones de orden superior es decir, de orden 4, 8 ya que aumentan el tiempo de computo pero mejora la precisión, es decir, minimiza la dispersión numérica. La dispersión numérica son errores en la solución debido a que la solución obtenida no es exacta. Para mejorar el tiempo de cómputo pero a la vez reducir la dispersión numérica Churl-Hyun Jo [12] en 1996 introduce un nuevo esquema de diferencias Finitas, conocido como Mallas Mixtas.

En 1996 Churl-Hyun Jo [12] introdujo su nuevo esquema para mejorar la dispersión numérica para la solución de la Ecuación de Helmholtz que modela la propagación de una onda en un medio acústico en dos dimensiones.

Esta técnica utilizada por Operto en [20] consiste en aproximar el Laplaciano de la ecuación de Helmholtz mediante diferencias finitas con el plano usual y el plano rotado en 45° y dándole un peso a cada una de estas aproximaciones. En esta formulación el término $\tilde{k}P$, conocido como *Lumped Mass* de la ecuación de Helmholtz se aproxima mediante elementos finitos y combinándolo con la técnica de rotar el plano se obtiene una nueva discretización. Así, usando combinaciones de estos términos con sus nuevas aproximaciones encontramos los valores óptimos para estos pesos que se le dieron a cada término que mejoran la dispersión numérica. En 2014 Jing Bo Chen en el dominio de Laplace-Fourier, muestra un esquema para solucionar la ecuación de onda con menor dispersión numérica para mallas rectangulares [13]. Usando el esquema de Churl-Hyun Jo y las ideas de Jing Bo mostraremos una solución numérica para la ecuación de Helmholtz para un medio con atenuación donde se optimiza la dispersión numérica.

2.1. Esquema Óptimo de 9 puntos

Para construir el esquema óptimo de 9 puntos para la solución de la Ecuación de Helmholtz Homogénea, primero recordemos que la ecuación que modela la propagación de un onda en un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias en dos dimensiones viene dada por la expresión;

$$\frac{1}{\xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{K(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla \cdot \left(\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \right) \quad (2.1)$$

que es nuestra ecuación de estudio y a partir de esta podemos deducir la ecuación de Helmholtz como lo describimos anteriormente:

$$\Delta P(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{k}^2 P(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (2.2)$$

donde $\tilde{k} = k(1 + i\gamma)$ y k es el número de onda y γ es valor de atenuación.

2.1. Esquema Óptimo de 9 puntos

A partir de la ecuación de Helmholtz homogénea construiremos el esquema de Jo [12] para un medio con atenuación para mejorar la solución numérica de 1.3.

2.1.1. Discretización del Laplaciano

Mediante Diferencias Finitas de segundo orden para el Laplaciano de la ecuación de Helmholtz 1.4 y denotando $P(x_m, z_n) = P_{m,n}$, obtenemos la siguiente aproximación para el Laplaciano de la ecuación de Helmholtz:

$$\Gamma = \Delta P_{m,n} \approx \frac{P_{m+1,n} - 2P_{m,n} + P_{m-1,n}}{\Delta^2} + \frac{P_{m,n+1} - 2P_{m,n} + P_{m,n-1}}{\Delta^2} \quad (2.3)$$

Ahora para obtener la nueva discretización del Laplaciano, rotamos el plano 45° como se muestra en la figura 2.1 y obtenemos un nuevo sistema de coordenadas para el plano tangente, es decir una nueva estructura de las derivadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right), \end{aligned}$$

y usando diferencias finitas sobre el Laplaciano de $P(x, z)$ en el nuevo sistema coordenado obtenemos

$$\begin{aligned} \Theta = \Delta P(x_m, z_n) &\approx \frac{P_{m+1,n-1} - 2P_{m,n} + P_{m-1,n+1}}{2\Delta^2} \\ &+ \frac{P_{m+,n+1} - 2P_{m,n} + P_{m-,n-1}}{2\Delta^2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

entonces el esquema introducido por Jo, se obtiene de combinar el esquema usual diferencias finitas 2.3 y el esquema de diferencias finitas del plano rotado 2.4 de manera convexa, así el nuevo esquema de discretización para el Laplaciano de P viene dado por la expresión:

$$\Delta P(x_m, z_n) \approx m_1 \Gamma + (1 - m_1) \Theta, \quad (2.5)$$

con $m_1 \in [0, 1)$. En la sección 2.4 mostraremos un método para obtener un valor de este parámetro de tal manera que la dispersión sea mínima.

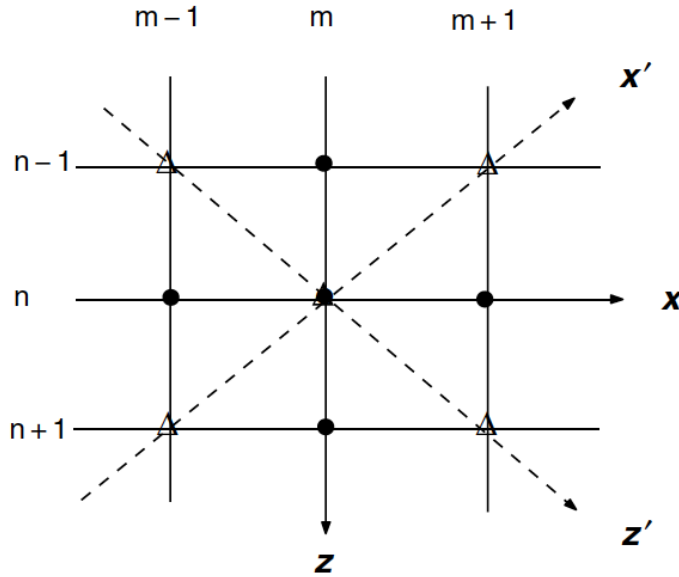


Figura 2.1: Esquema de Óptimo de 9 puntos

2.1.2. Discretización del término Lumped-Mass

El término $\tilde{k}^2 P(x, z)$ es conocido como *Lumped-Mass* en el área de la Geofísica y el valor de \tilde{k} complejo introduce la atenuación del medio donde se propaga la onda. En 1984 [16] Marfurt introdujo a partir de Elementos Finitos una aproximación para este término, dicha aproximación tiene la siguiente expresión:

$$\Sigma_{0^\circ} = P(x_m, z_n) \approx \frac{1}{4}(P_{m+1,n} + P_{m-1,n} + P_{m,n+1} + P_{m,n-1}),$$

que corresponde a la discretización sobre el plano usual, es decir, sin rotar.

2.2. Consistencia del Esquema

Usando la misma idea de rotar el plano, que se puede visualizar en la figura 2.1 sobre esta aproximación obtenemos una nueva discretización para $\tilde{k}^2 P(x, z)$

$$\Sigma_{45^\circ} = P(x_m, z_n) \approx \frac{1}{4}(P_{m+n, m-n} + P_{m-1, n-1} + P_{m-1, n+1} + P_{m+1, n+1}),$$

así usando la misma idea de Jo, pero para el termino Lumped Mass tenemos que

$$\Phi(m_2, m_3) = P(x_m, z_n) \approx m_2 P(x_m, z_n) + m_3 \Sigma_{0^\circ} + m_4 \Sigma_{45^\circ} \quad (2.6)$$

con

$$\frac{1 - m_2 - 4m_3}{4} = m_4.$$

Combinando las ecuaciones 2.5 y 3.9 obtenemos un esquema óptimo de 9 puntos para la discretización de la ecuación de Helmholtz Homogénea para un medio acústico con atenuación:

$$\Delta P(x_m, z_n) + \tilde{k}^2 P(x_m, z_n) \approx m_1 \Gamma + (1 - m_1) \Theta + \Phi(m_2, m_3) = 0 \quad (2.7)$$

donde m_1, m_2, m_3 son parámetros, que según sus valores, buscan mejorar la dispersión numérica, es decir, los errores con respecto a la solución real sean lo más pequeños posibles. En la sección 2.2 mostraremos que este esquema es consistente y en la sección 2.4 encontraremos una estrategia para obtener parámetros óptimos que mejoran la dispersión numérica.

2.2. Consistencia del Esquema

En la sección anterior introdujimos un nuevo esquema para la solución numérica de la ecuación de Helmholtz Homogénea para un medio con atenuación. En esta sección mostraremos que este esquema es consistente.

Definición 2.1. Sea $Lu = f$ una ecuación diferencial parcial y sea $L_{m,n}U_{m,n} = F_{m,n}$ una aproximación por diferencias finitas de la EDP. Sea $(x_m, z_n := (x + (m - 1)\delta x, z + (n - 1)\delta z)$. Entonces el esquema de diferencias finitas es consistente con la EDP $Lu = f$ sí para cada función suave $\phi = \phi(x, z)$

$$(L\phi - f)|_{x=x_m, z=z_n} - [L_{m,n}U_{m,n} - F_{m,n}] \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

con $\delta x, \delta z \rightarrow 0$ y $(x_m, z_n) \rightarrow (x, z)$ [8].

Esta definición es equivalente a la introducida en B.3, solo que esta viene dada para diferencias finitas. A partir de esta definición mostraremos que dicho esquema es consistente.

Teorema 2.1. *El esquema óptimo de nueve 9 para la ecuación de Helmholtz Homogénea es consistente.*

Demostración: Usando expansión de Taylor de orden 4 para cada termino del esquema usual de Diferencias Finitas (Γ) obtenemos la siguientes expresiones:

$$P_{m-1,n} = P + \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$

$$P_{m+1,n} = P - \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$

$$P_{m,n-1} = P + \frac{\partial P}{\partial z} h + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$

$$P_{m,n+1} = P - \frac{\partial P}{\partial z} h + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$

Por tanto a partir de la expresión 2.3 obtenemos la siguiente

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^2}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^2}{4!} + O(h^2). \quad (2.9)$$

2.2. Consistencia del Esquema

Haciendo lo mismo para el esquema de Diferencias Finitas rotadas (Θ) se tiene que

$$\begin{aligned}
 P_{m+1,n-1} &= P - \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial P}{\partial z} h - \frac{\partial P^2}{\partial x \partial z} h^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} \\
 &+ \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial z} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial z^2} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^4 P}{\partial x^3 \partial z} \frac{h^4}{4!} \\
 &+ \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial z^3} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{m-1,n-1} &= P + \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial P}{\partial z} h + \frac{\partial P^2}{\partial x \partial z} h^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} \\
 &+ \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial z} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial z^2} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^3 \partial z} \frac{h^4}{4!} \\
 &+ \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial z^3} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{m-1,n+1} &= P + \frac{\partial P}{\partial x} h - \frac{\partial P}{\partial z} h - \frac{\partial P^2}{\partial x \partial z} h^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} \\
 &- \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial z} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial z^2} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^4 P}{\partial x^3 \partial z} \frac{h^4}{4!} \\
 &+ \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial z^3} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{m+1,n+1} &= P - \frac{\partial P}{\partial x} h - \frac{\partial P}{\partial z} h + \frac{\partial P^2}{\partial x \partial z} h^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} \\
 &- \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial z} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial z^2} \frac{h^3}{3!} - \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^3 \partial z} \frac{h^4}{4!} \\
 &+ \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x \partial z^3} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)
 \end{aligned}$$

Así para la aproximación del Laplaciano en el plano rotado obtenemos

$$\Theta = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{h^2}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \frac{h^2}{4!} + O(h^2) \quad (2.10)$$

Ahora, haciendo el mismo análisis mediante el Teorema de Taylor pero para los términos obtenidos en el *Lumped Mass* se obtiene

$$\begin{aligned}\Sigma_{0^\circ} &= 4P + 4\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}h^2 + 4\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}h^2 + O(h^3) \\ \Sigma_{45^\circ} &= 4P + 4\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}h^2 + 4\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}h^2 + O(h^3)\end{aligned}$$

Así obtenemos una aproximación para el término Lumped-Mass

$$\tilde{k}^2(m_2P + m_3\Sigma_{0^\circ} + m_4\Sigma_{45^\circ}) = \tilde{k}^2P + \tilde{k}^2\frac{1}{2}(m_3 + m_4)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)h^2 + O(h^3)$$

De la expresión anterior y de 2.9, 2.10 se obtiene que

$$m_1\Gamma + (1 - m_1)\Theta + \Phi(m_2, m_3) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \tilde{k}^2P + h^2(v_1 + v_2 + v_3) + O(h^2),$$

donde

$$\begin{aligned}v_1 &= (1 - m_1)\left(\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}\frac{1}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4}\frac{1}{4!}\right) \\ v_2 &= m_1\left(\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}\frac{1}{4!} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4}\frac{1}{4!}\right) \\ v_3 &= (m_3 + m_4)\left(4\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\end{aligned}$$

Así de la definición 2.1 y la ecuación anterior obtenemos la consistencia del método óptimo de 9 puntos. Además podemos concluir que el orden de convergencia del esquema óptimo de 9 puntos es cuadrático.

2.3. Dispersión Numérica

Métodos numéricos como las Diferencias Finitas para solucionar la Ecuación de Helmholtz 1.4 se ven afectados por la dispersión numérica que puede

2.3. *Dispersión Numérica*

ser importantes, especialmente si el número de onda es grande con respecto al tamaño de la malla. La dispersión numérica es el error generado por la discretización, es decir, que tanto se aleja la solución obtenida de la real

El error de la contaminación, en comparación con el error de interpolación estándar, es de naturaleza global porque las fuentes del error afectan (contaminan) la solución en todo el dominio, y no sólo cuando la resolución de la malla no es suficientemente buena para aproximar adecuadamente la solución. Por lo tanto, el error no se puede eliminar mediante el refinamiento local, incluso si la cantidad a evaluar es definido localmente.

Para cuantificar este error se realizan comparaciones entre los valores numéricos obtenidos para la solución de la EDP durante la aplicación de Diferencias Finitas y la solución teórica de esta. Por ejemplo, el número de onda correspondiente a la solución aproximada es diferente del valor teórico. Los errores correspondiente están directamente relacionados con el error de dispersión y con los resultados.

Para poder cuantificar la dispersión numérica generada por la aproximación es necesario comparar la solución numérica obtenida con la solución analítica o en nuestro caso, el esquema óptimo de 9 puntos con la solución a la ecuación de Helmholtz No Homogénea para un medio acústico con atenuación (eq 1.6). Así cuantificamos el error.

$$error = \frac{\|P - P^N\|}{\|P\|} \quad (2.11)$$

donde P es la solución analítica, P^N solución numérica y $\|\cdot\|$ es alguna norma, que para nuestro caso será la norma $\|\cdot\|_2$ [2].

2.4. Estrategia para obtención de Parámetros Óptimos m_i

Para obtener valores de los parámetros de 2.7 que minimizan la dispersión numérica, usaremos la solución analítica para la ecuación de Helmholtz 1.4, discretizándola y reemplazándola en la ecuación 2.7 de tal manera que posteriormente despejando \tilde{k} de la expresión que se obtiene se hace la comparación entre el número de onda numérico y el teórico de tal manera de la expresión obtenida se acerque al valor de uno y posteriormente minimizando las funciones obtenidas se consigue los valores de los parámetros en 2.7 que minimizan la dispersión.

Primero recordemos la solución a la ecuación de Helmholtz Homogénea viene dada por la ecuación de onda plana 1.4

$$P(r) = P_0 e^{-i(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})}$$

donde $\mathbf{r} = (x, z)$ y $(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) = \tilde{k}x \cos(\theta) + \tilde{k}z \sin(\theta)$

Discretizando la solución de una onda plana obtenemos la siguiente expresión

$$P_{m,n} = P_0 e^{i\tilde{k}h[m \cos(\theta) + n \sin(\theta)]}$$

donde θ es en ángulo de propagación del frente de onda y h es la norma de la partición.

Así para cada punto del plano usual y rotado, como se muestra en la

2.4. Estrategia para obtención de Parámetros Óptimos m_i

figura 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{m+1,n} &= P_{m,n} e^{i\tilde{k}h \cos(\theta)} \\
P_{m-1,n} &= P_{m,n} e^{-i\tilde{k}h \cos(\theta)} \\
P_{m,n+1} &= P_{m,n} e^{i\tilde{k}h \sin(\theta)} \\
P_{m,n-1} &= P_{m,n} e^{-i\tilde{k}h \cos(\theta)} \\
P_{m+1,n+1} &= P_{m,n} e^{i\tilde{k}h(\cos(\theta)+\sin \theta)} \\
P_{m-1,n+1} &= P_{m,n} e^{i\tilde{k}h(-\cos(\theta)+\sin \theta)} \\
P_{m+1,n-1} &= P_{m,n} e^{i\tilde{k}h(\cos(\theta)-\sin \theta)} \\
P_{m-1,n-1} &= P_{m,n} e^{-i\tilde{k}h(\cos(\theta)+\sin \theta)}
\end{aligned}$$

Reemplazando en $\Delta P(x_i, z_j) + \tilde{k}^2 P(x_i, z_j) \approx m_1 \Gamma + (1 - m_1) \Theta + \Phi(m_2, m_3) = 0$ (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
&T_1(P_{m+1,n} + P_{m-1,n} + P_{m,n+1} + P_{m,n-1}) \\
&+ T_2(P_{m+1,n+1} + P_{m-1,n+1} + P_{m+1,n-1} + P_{m-1,n-1}) + T_3 P_{m,n} = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $T_1 = \frac{m_1}{h^2} + \tilde{k}^2 m_3$, $T_2 = \frac{1 - m_1}{2h^2} + \tilde{k}^2 m_4$ y $T_3 = \frac{-4m_1}{h^2} - \frac{2(1 - m_1)}{h^2} + \tilde{k}^2 m_2$.

Ya que $P_{m,n} \neq 0$ y utilizando el hecho que $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ obtenemos

$$2T_1[\cos(\tilde{k}h \cos(\theta)) + \cos(\tilde{k}h \sin(\theta))] \tag{2.13}$$

$$+ 4T_2[\cos(\tilde{k}h \cos(\theta)) \cos(\tilde{k}h \sin(\theta))] + T_3 = 0 \tag{2.14}$$

Ahora tomando $\tilde{k} = k_r + ik_i$ entonces $hk_r = \frac{2\pi}{G_r} = 2\pi\tau_r$ y $hk_i = \frac{2\pi}{G_i} = 2\pi\tau_i$

donde $G_r = \frac{1}{\tau_r}$ y $G_i = \frac{1}{\tau_i}$ (G_r y G_i son llamados número de malla y pseudonúmero de malla).

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{k}h \cos(\theta) &= 2\pi\tau_r \cos(\theta) + i2\pi\tau_i \cos(\theta) \\ \tilde{k}h \sin(\theta) &= 2\pi\tau_r \sin(\theta) + i2\pi\tau_i \sin(\theta)\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}p_1 &= 2\pi\tau_r \sin(\theta), & p_2 &= 2\pi\tau_i \sin(\theta) \\ q_1 &= 2\pi\tau_r \cos(\theta), & q_2 &= 2\pi\tau_i \cos(\theta),\end{aligned}$$

usando la expresión para el coseno con argumento complejo se obtiene las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\cos(q_1 + iq_2) &= \cos(q_1) \cosh(q_2) - i \sin(q_1) \sinh(q_2) \\ \cos(p_1 + ip_2) &= \cos(p_1) \cosh(p_2) - i \sin(p_1) \sinh(p_2),\end{aligned}$$

denotando las expresiones anteriores de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos(q_1) \cosh(q_2), & \beta &= \sin(q_1) \sinh(q_2) \\ \mu &= \cos(p_1) \cosh(p_2), & \eta &= \sin(p_1) \sinh(p_2),\end{aligned}$$

podemos simplificar 2.14 en la siguiente expresión

$$2T_1(\mu - i\eta + \alpha - i\beta) + 4T_2(\mu - i\eta)(\alpha - i\beta) + T_3 = 0 \quad (2.15)$$

y despejando \tilde{k}

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{h^2} \frac{2b[2 - (\mu + \alpha - i(\eta + \beta))] + 2c[1 - (\mu - i\eta)(\alpha - i\beta)]}{d + 2e[(\mu + \alpha - i(\eta + \beta))] + 4f(\mu - i\eta)(\alpha - i\beta)}. \quad (2.16)$$

Para obtener una expresión más simple de \tilde{k} reescribimos nuestra expresión anterior 2.16. Recordemos que $m_4 = \frac{1 - m_2 - 4m_3}{4}$ y definiendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}V &= [2(2 - \mu - \alpha) - 2(1 - \mu\alpha + \eta\beta)]m_1 + 2(1 - \mu\alpha + \eta\beta) \\ \tilde{V} &= 2[(\eta + \beta) - (\eta\alpha + \mu\beta)]m_1 + 2(\eta\alpha + \mu\beta) \\ W &= [1 - (\mu\alpha - \eta\beta)]m_2[2(\mu + \alpha) - 4(\mu\alpha - \eta\beta)]m_3 + (\mu\alpha - \eta\beta) \\ \tilde{W} &= [\eta\alpha + \beta\mu]m_2 + [4(\eta\alpha + \beta\mu) - 2(\eta + \beta)]m_3 - (\eta\alpha + \beta\mu),\end{aligned}$$

2.4. Estrategia para obtención de Parámetros Óptimos m_i

así 2.16 queda de la siguiente manera:

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{h^2} \frac{V + i\tilde{V}}{W + i\tilde{W}},$$

sacando raíz cuadrada ambos lados obtenemos

$$\tilde{k} = \frac{1}{h} \frac{(A^2 + B^2)^{1/4}}{R} [\cos \phi' + i \sin \phi'] \quad (2.17)$$

donde:

$$A = VW + \tilde{V}\tilde{W}$$

$$B = \tilde{V}W - \tilde{W}V$$

$$R^2 = W^2 + \tilde{W}^2$$

$\phi' = \tan^{-1}(\frac{B}{A})$ donde ϕ' es el argumento principal.

Separando la parte compleja y real se obtiene

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{1}{h} \frac{(A^2 + B^2)^{1/4}}{R} \cos \phi' \\ k_i &= \frac{1}{h} \frac{(A^2 + B^2)^{1/4}}{R} \sin \phi', \end{aligned}$$

dividiendo las expresiones anteriores por k que corresponde al número de onda teórico definimos las siguiente funciones:

$$M := \frac{k_r}{k} = \frac{1}{2\pi\tau_r} \frac{(A^2 + B^2)^{1/4}}{R} \cos \phi' \quad (2.18)$$

$$N := \frac{k_i}{k} = \frac{1}{2\pi\tau_i} \frac{(A^2 + B^2)^{1/4}}{R} \sin \phi', \quad (2.19)$$

donde M y N dependen de θ , τ_r , τ_i m_1 , m_2 y m_3 .

Para encontrar nuestro parámetros óptimos suponemos $N, M \rightarrow 1$, para que la diferencia entre los valores numéricos y teóricos sea mínima, es decir, la dispersión numérica sea menor. A partir de esta suposición definimos una función objetivo a minimizar [13]

$$\chi(m_1, m_2, m_3) = \int_V (1 - M)^2 + (1 - N)^2 dV, \quad (2.20)$$

donde $V = [\theta_{min}, \theta_{max}] \times [\tau_{r min}, \tau_{r max}] \times [\tau_{i min}, \tau_{i max}]$.

Para encontrar los parámetros m_1, m_2, m_3 que minimizan esta función desarrollamos un algoritmo en el lenguaje de programación PYTHON y se obtuvieron los siguientes parámetros.

$$m_1 = 0.6667, m_2 = 0.6556, m_3 = 0.0889$$

Observaciones

- Vemos que si tomamos $m_1 = 1, m_2 = 1$ y $m_3 = 0$ obtenemos el esquema usual de diferencias finitas para la ecuación de Helmholtz
- Si tomamos a \tilde{k} como un numero real y haciendo $N = 0$ obtenemos el esquema de Jo para un medio acústico y aplicando la misma técnica de minimización obtenemos los valores de los parámetros encontrados en este artículo [12].
- El método solo es consistente cuando se utilizan mallas cuadradas, i.e, cuando $\Delta x = \Delta z$

2.5. Descripción Código

Como comentamos anteriormente, para obtener parámetros óptimos a partir de la ecuación 2.20 desarrollamos un algoritmo en el lenguaje de Programación PYTHON, para poder encontrar valores minimos para la función 2.20 utilizamos las siguientes librerías de dicho lenguaje.

- Numpy: Es la librería científica de Python que contiene la funciones como *seno*, *sqrt*, entre otras, ademas permite el manejo de vectores a diferencia de la librería Math

- Scipy: Es el paquete de análisis numérico. Usamos la siguientes funciones
 - *integrate.nquad*: Es una función para calcular integrales multiples usando la cuadratura .Gaussian.
 - *minimize.fmin_bfgs*: Es un método de minimización llamado Algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, que es usado para encontrar mínimos de funciones mediante el gradiente. Calcula el gradiente para la dirección del descenso con diferencias finitas.

2.6. Resultados y Comparaciones

A partir de los parámetros obtenidos mostraremos resultados y comparaciones realiza con las solución analítica, el esquema usual de Diferencias Finitas y el esquema óptimo de 9 puntos introducido en este capítulo.

2.6.1. Análisis de Dispersión Numérica

Recordemos que la velocidad de propagación de fase viene dada por la expresión $V_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$ y además la velocidad de propagación de fase numérica es $V_{ph}^N = \frac{\omega}{k^N}$, por tanto tenemos que

$$\frac{V_{ph}^N}{c} = \frac{k^N}{k} \quad (2.21)$$

y denotando v_r como la velocidad de fase numérica real y v_i la pseudovelocidad de fase numérica o velocidad de atenuación numérica, definiendo $v := c$ obtenemos que

- $\frac{v_r}{c} = \frac{k_r}{k}$
- $\frac{v_i}{c} = \frac{k_i}{k}$ [8].

A partir de las igualdades anteriores y los parámetros obtenidos, podemos realizar un Análisis de Dispersión, comparando el esquema usual de Diferencias Finitas (El esquema de 5 puntos) y el esquema Óptimo de 9 puntos introducido por Jo (El esquema de 9 puntos). Para realizar estas comparaciones comparamos realizamos gráficas de las funciones M y N (2.18 y 2.19) para los dos esquemas.

Las figuras 2.2 que corresponde a la gráfica de M muestran $1/G_r$, donde G_r es el número de malla real contra la velocidad de propagación de fase numérica normalizada v_r/v para diferentes ángulo de propagación de la onda y fijando para cada caso el valor de $1/G_i$ (G_i corresponde al número de malla complejo). De igual manera para 2.3 que corresponde a N , se gráfica $1/G_i$ contra la velocidad de atenuación normalizada para diferentes ángulos fijando $1/G_r$. Las líneas solidas en las figuras corresponde al esquema de 9 puntos mientras las punteadas al esquema usual de 5 puntos. En las figuras se pueden apreciar la diferencia en la dispersión de los dos métodos, donde se ve un gran mejora en el de 9 puntos vs el de 5 puntos

De las figuras 2.2 y 2.3 podemos observar que a mayores valores de $1/G_i$ y $1/G_r$ mayor la dispersión numérica en el esquema de 5 puntos, es decir, en el esquema usual de Diferencias Finitas, alcanzado errores hasta del 10%. Para el esquema optimo de 9 puntos, el valor más alto de error es del 1%.

Ademas de la gráficas anteriores, se observa también que un valor óptimo para G_r es 23 en el esquema de 5 puntos, ya que es el valor donde presenta menor dispersión numérica y para el esquema óptimo de 9 puntos es 7. Para las gráficas 2.4, es decir para M variando $1/G_r$ y $1/G_i$ obtuvimos valores de v_r/v para diferentes ángulos de propagación de la onda, comparando los esquemas de Diferencias Finitas usual y el esquema de 9 puntos, donde

2.6. Resultados y Comparaciones

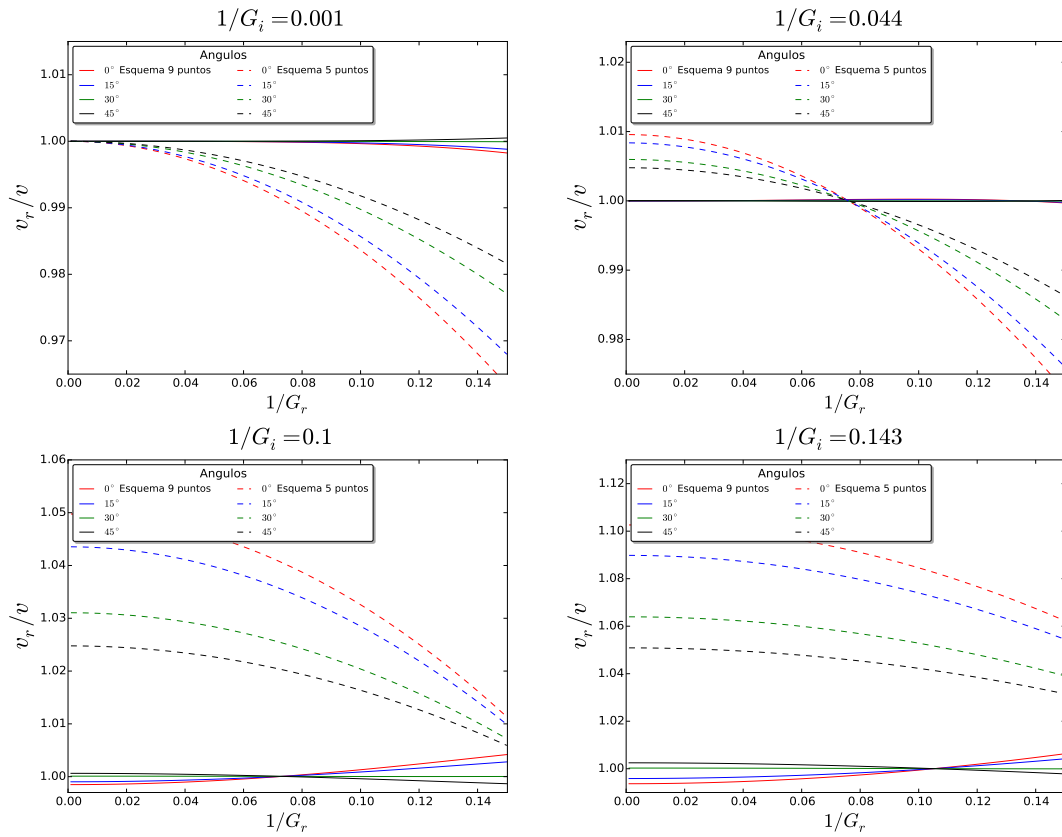


Figura 2.2: Velocidad Fase Normalizada v_r/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, para diferentes ángulos de propagación. Fijando en cada gráfica $1/G_i$ y variando $1/G_r$.

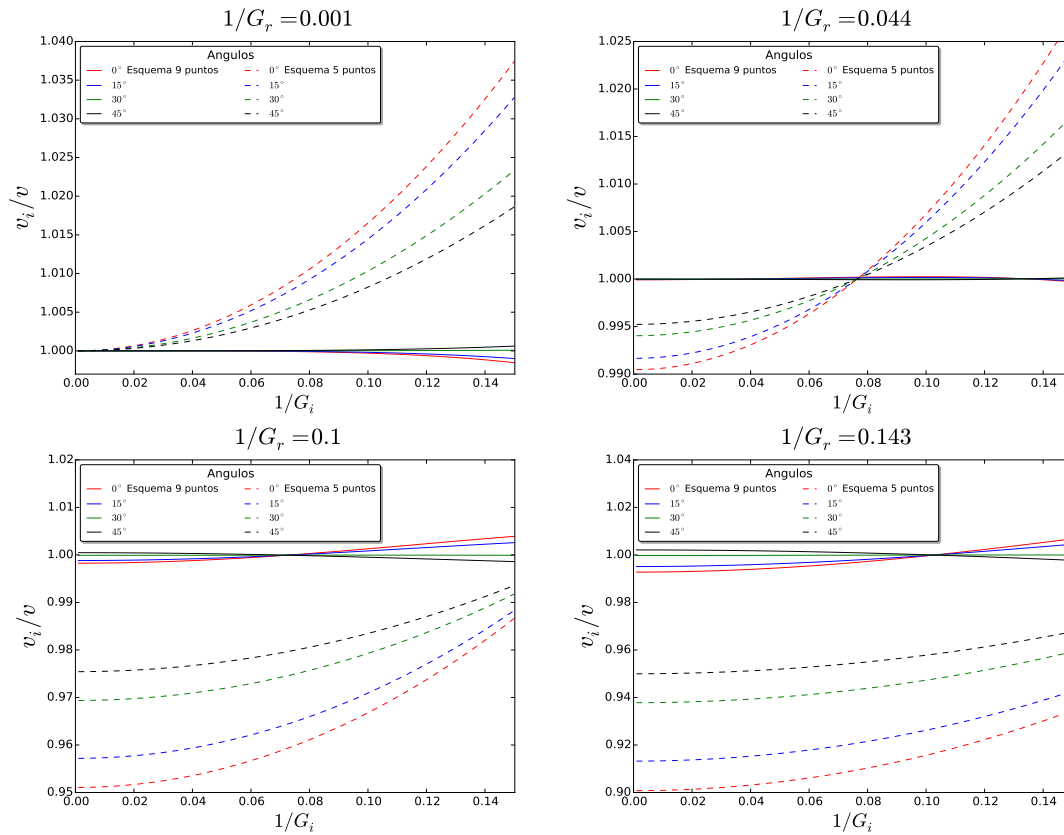


Figura 2.3: Velocidad de Atenuación Normalizada v_i/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, para diferentes ángulos de propagación. Fijando en cada gráfica $1/G_r$ y variando $1/G_i$.

2.6. Resultados y Comparaciones

se pueden observar la diferencias entre las dispersiones numéricas siendo mayor en el esquema de 5 puntos. Lo mismo sucede para la gráfica 2.5 que corresponde a N , que se varían los parámetros $1/G_r$ y $1/G_i$ y se obtienen valores para la velocidad de atenuación normalizada v_i/v para diferentes ángulos.

2.6.2. Comparaciones Numéricas

Para diferentes números de ondas $\tilde{k} = k_r + ik_i$ y variando la cantidad de puntos de la discretización para un dominio $(0, 1) \times (0, 1)$ con una velocidad constante de $2km/s$ y la fuente es una función Ricker S que esta ubica en el centro del dominio y tiene la siguiente forma:

$$S = -\frac{b}{\xi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f^2}{f_M^3} e^{-\frac{f^2}{f_M^2}},$$

donde b depende de la velocidad, ξ de la frecuencia propia de la onda, f_M es la frecuencia de la fuente, que corresponde a $50Hz$, f es la frecuencia propia del medio. Obtuvimos las siguientes tablas comparando el error $\|P_{real} - P_{num}\|/\|P_{real}\|$, donde P_{real} es la solución analítica para la ecuación de Helmholtz no Homogénea y P_{num} la solución numérica para el esquema usual de diferencias finitas (5p) y el esquema óptimo de 9 puntos (9p). Recordemos que la solución analítica viene dada por:

$$P(\mathbf{x}, \omega) = i\pi H_0^{(2)}(\tilde{k}r)S(\mathbf{x}, \omega),$$

donde $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel. Las condiciones de frontera viene siendo las descritas en 1.1. Todos estos cálculos fueron realizados en MATLAB.

Fijando un valor de $z = 0, 1$ y para diferentes k_r y k_i se obtuvieron los siguientes valores de la diferencia en la norma del supremo de la solución numérica y la analítica para cada método numérico respectivamente

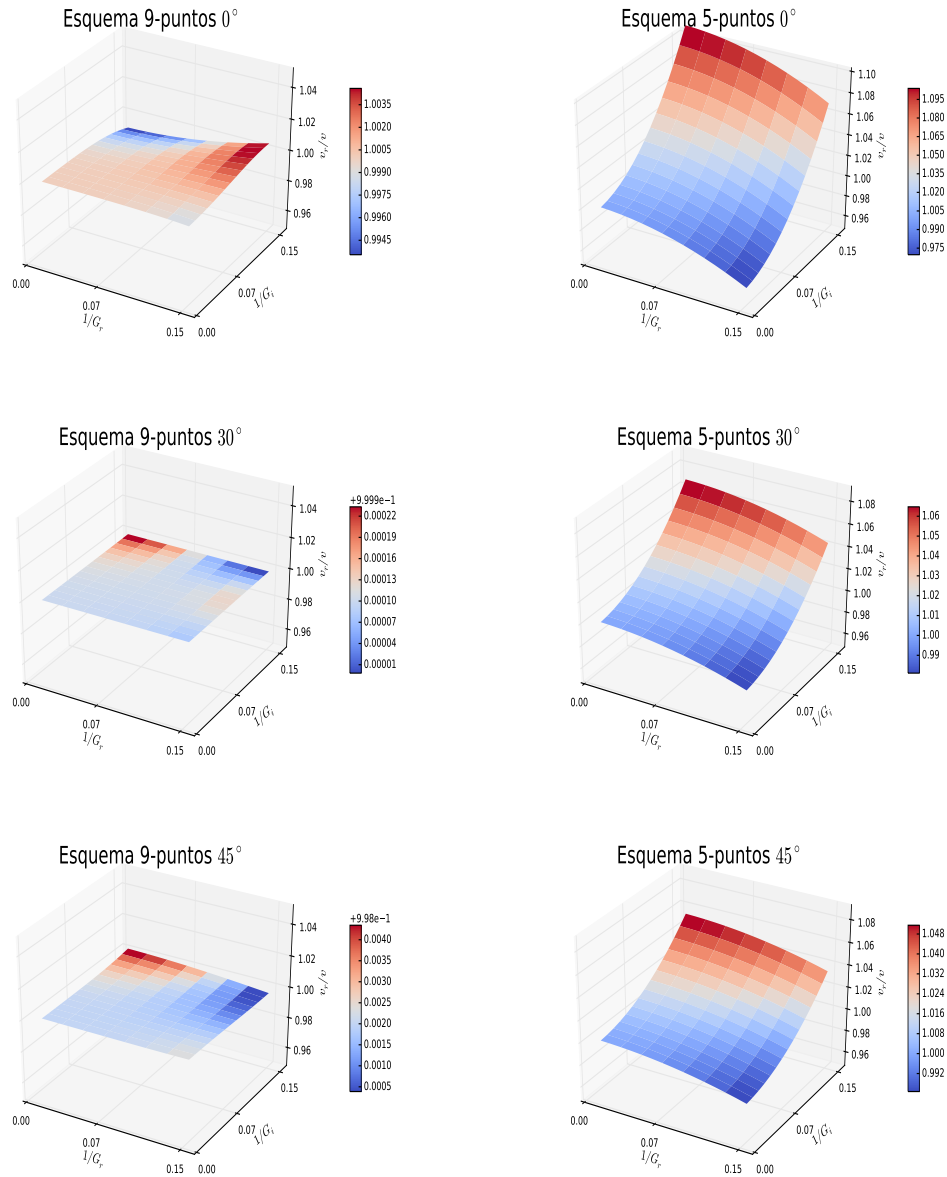


Figura 2.4: Velocidad de propagación Normalizada v_r/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, variando $1/G_r$ y $1/G_i$. Para diferentes ángulos de propagación

2.6. Resultados y Comparaciones

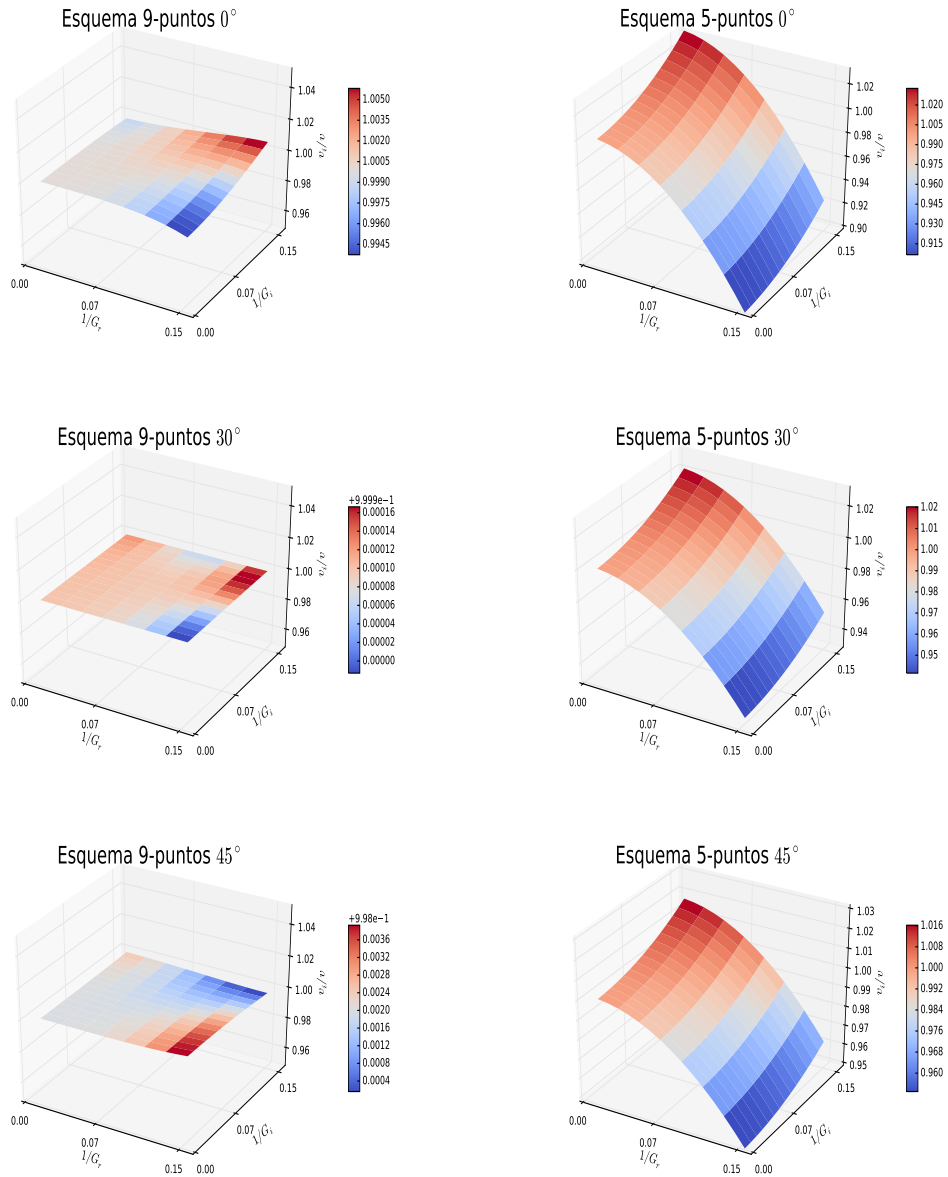


Figura 2.5: Velocidad de Atenuación Normalizada v_i/v para el esquema de 5 puntos y 9 puntos, variando $1/G_r$ y $1/G_i$. Para diferentes ángulos de propagación

Capítulo 2. Esquema Óptimo para Solución de la Ecuación de Onda
Visco-Acústica

$k_r = 30, k_i = 10$

N	6	13	27
5p	0,17122	0,1592	0,15861
9p	0,16129	0,14932	0,15348

$k_r = 30, k_i = 30$

N	6	13	27
5p	0,2490	0,3722	0,3003
9p	0,399906	0,39767	0,30852

$k_r = 200, k_i = 10$

N	129	257	513
5p	1,5344	0,58824	0,16669
9p	0,10384	0,033515	0,029648

$k_r = 200, k_i = 30$

N	129	257	513
5p	1,47459	0,84569	0,24233
9p	0,10384	0,55838	0,097055

$k_r = 200, k_i = 200$

N	129	257	513
5p	1,7335	0,37206	0,17484
9p	0,7875	0,092608	0,1123

$k_r = 500, k_i = 10$

N	513	601	701	801
5p	1,5537	1,2127	0,912	0,713
9p	0,04677	0,023446	0,013551	0,0090228

$k_r = 500, k_i = 30$

N	513	601	701	801
5p	1,6183	1,2898	0,93051	0,66878
9p	0,051642	0,02643	0,15282	0,0098639

$k_r = 500, k_i = 200$

N	513	601	701	801
5p	0,4428	0,34552	0,2655	0,20875
9p	0,017489	0,013207	0,011751	0,010441

2.6. Resultados y Comparaciones

$$\hat{k}_r = 500, k_i = 500$$

N	513	601	701	801
5p	0,90159	11,84423	6976	3,0914
9p	0,1371	0,021466	0,004633	0,0082978

Como se puede observar en las tablas anteriores los errores relativo obtenidos entre comparar la solución analítica y numérica, el método de 9 puntos es muchas mas preciso que a diferencia del método de 5 puntos y más aun para número de onda grandes del orden de 100 o mas el esquema de 9 puntos tiene un gran precisión.

Ademas se obtuvieron las gráficas 2.6 donde se muestra que para diferentes valores de \tilde{k} se puede evidenciar la mejora del método introducido en este capítulo en comparación al esquema usual de diferencias finitas, comparando con la solución analítica.

Capítulo 2. Esquema Óptimo para Solución de la Ecuación de Onda Visco-Acústica

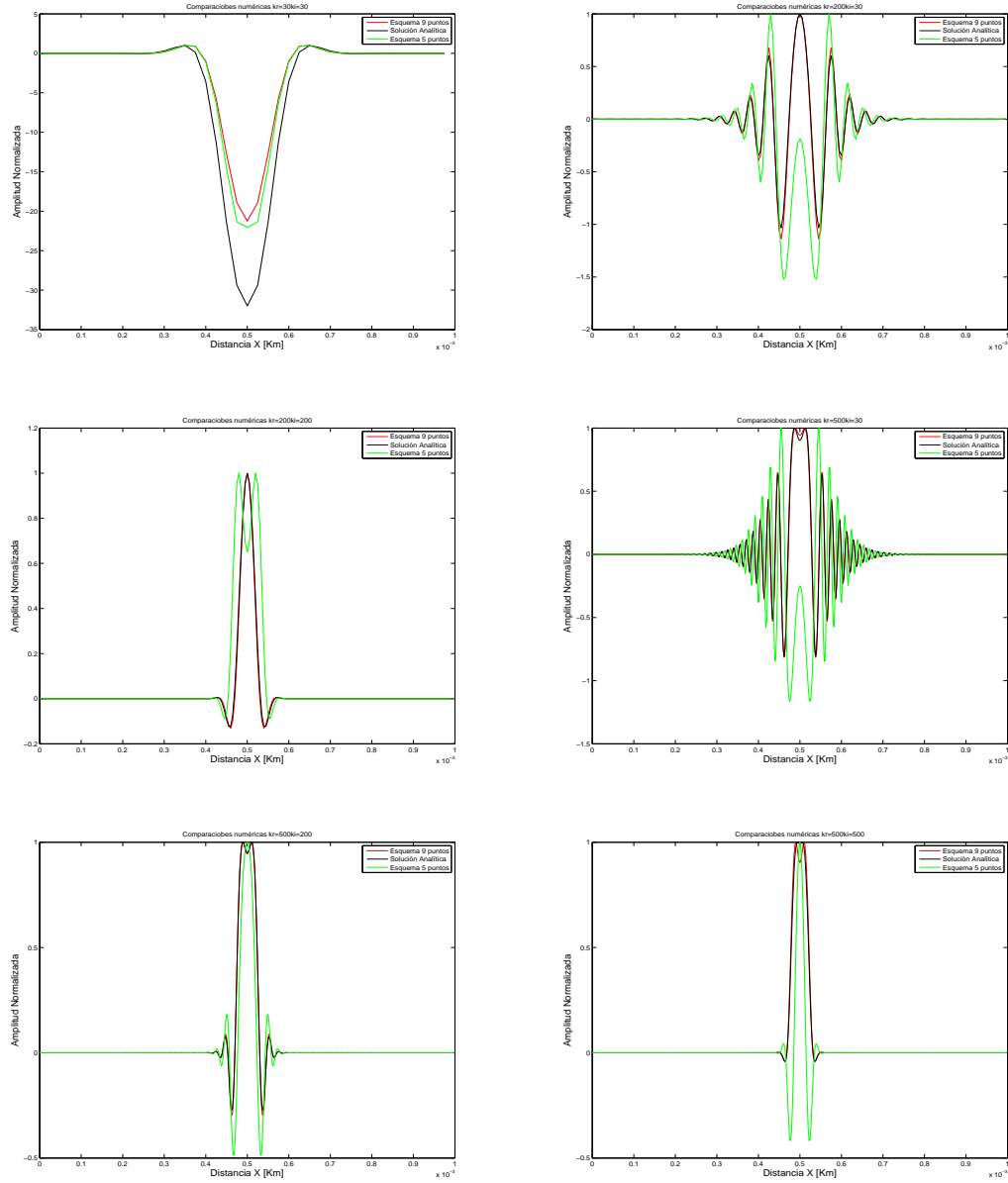


Figura 2.6: Comparación numérica entre la solución analítica a Helmholtz no homogéneo, el esquema de 5 puntos y 9 puntos para diferentes números de onda, graficando el dominio en x vs la amplitud normalizada.

Capítulo 3

Modelado para la Ecuación Visco-Acústica 2D en el dominio de las frecuencias

Mostraremos como solucionar la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico en 2D mediante el esquema óptimo introducido en el capítulo 2, mediante este método obtenemos una solución con menor dispersión numérica y usando la Fronteras Absorbentes (PMLs), para evitar las reflexiones en la frontera [9].

Como expone en la sección B los problemas inversos acarrear un problema grande cuando el problema se resuelve por métodos iterativos, ya que si la matriz A tiene un número de condición grande, la solución obtenida es probablemente muy alejada a lo esperado como se muestra en el ejemplo de la sección de número de condición.

Del número de condición de la matriz obtenida al discretizar nuestra ecuación 1.3 con el método expuesto en el capítulo 2, es una matrix mal

condicionada ya que su número de condición aumenta con respecto a la frecuencia (ω) como mostraremos en la sección B.1 para diferentes modelos de velocidad de velocidad.

Por lo anterior ya que el la solución por métodos iterativos para nuestro problema es inestable se debe precondicionar nuestro problema como se muestra en la sección B.1.2 para obtener una mejor respuesta a esta.

3.1. Discretización

Usaremos el esquema construido en la capítulo 2 para discretizar la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico 1.3.

Recordemos que la ecuación 1.3 viene dada por la expresión

$$\frac{1}{\xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}, \omega)} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{K(\mathbf{x})} P(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi(\rho(\mathbf{x}) \omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \right)$$

donde $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad del medio, $\xi(\mathbf{x}, \omega)$ es la atenuación que hace que la onda tenga perdida de energía, esta función es compleja-valuada; $K(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})^2 \rho(\mathbf{x})$ es el coeficiente de Bulk, $c(\mathbf{x})$ es la velocidad de propagación de la onda en el medio, \mathbf{F} es la fuerza de la fuente con la que se genera la onda y ∇ es el gradiente de la función.

Recordemos que esta ecuación viene de la siguientes leyes 1.1 y 1.2 expuesta en la capítulo 1.

1. Derivada temporal de la ley de Hooke

$$-i\omega P(\omega, \mathbf{x}) = \frac{K(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla \cdot \mathbf{V}(\omega, \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

2. Ley de Newton

$$-i\omega \mathbf{V}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla P(\omega, \mathbf{x}) + \frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\omega, \mathbf{x}),$$

3.1. Discretización

. Tomando $S(\omega, \mathbf{x}) = \frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\omega, \mathbf{x})$, ya que la Ley de Newton es una función vectorial y tomando $\mathbf{x} = (x, z)$, la podemos descomponer como:

$$-i\omega V_x(\omega, x, z) = -\frac{b(x, z)}{\xi(\omega, x, z)} \frac{\partial P(\omega, x, z)}{\partial x} + S_x(\omega, x, z) \quad (3.2)$$

$$-i\omega V_z(\omega, x, z) = -\frac{b(x, z)}{\xi(\omega, x, z)} \frac{\partial P(\omega, x, z)}{\partial z} + S_z(\omega, x, z). \quad (3.3)$$

Para poder realizar un discretización más eficiente, la discretización de la ecuación visco-acústica la realizaremos a partir de la dos anteriores ecuaciones y usando malla intercaladas, es decir tomando los puntos medios entre dos puntos de la malla.

3.1.1. Discretización en Malla Intercalada Usual

Usando Diferencias Finitas de Segundo orden para las componentes de la velocidad V

$$\left[\frac{\partial V_x}{\partial x} \right]_{m,n} \approx \frac{1}{h} (V_{x_{m+1/2,n}} - V_{x_{m-1/2,n}}) \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{\partial V_z}{\partial z} \right]_{m,n} \approx \frac{1}{h} (V_{z_{m,n+1/2}} - V_{z_{m,n-1/2}}) \quad (3.5)$$

Entonces a partir de las ecuaciones 3.4 y 3.5 podemos obtener la discretización de los términos con derivadas de 3.1, 3.2 y 3.3.

$$\begin{aligned} -i\omega V_{x_{m+1/2,n}} &= -\frac{b_{m+1/2,n}}{\xi_{m+1/2,n}} \frac{1}{h} (P_{m+1,n} - P_{m,n}) \\ -i\omega V_{x_{m-1/2,n}} &= -\frac{b_{m-1/2,n}}{\xi_{m-1/2,n}} \frac{1}{h} (P_{m,n} - P_{m-1,n}) \\ -i\omega V_{z_{m,n+1/2}} &= -\frac{b_{m,n+1/2}}{\xi_{m,n+1/2}} \frac{1}{h} (P_{m,n+1} - P_{m,n}) \\ -i\omega V_{z_{m,n-1/2}} &= -\frac{b_{m,n-1/2}}{\xi_{m,n-1/2}} \frac{1}{h} (P_{m,n} - P_{m,n-1}) \\ -i\frac{\omega \xi_{m,n} P_{n,m}}{K_{m,n}} &= \frac{1}{h} (V_{x_{m+1/2,n}} - V_{x_{m-1/2,n}}) + \frac{1}{h} (V_{z_{m,n+1/2}} - V_{z_{m,n-1/2}}) \end{aligned}$$

ya que el inverso de la función de densidad y la función de atenuación solo tiene valores sobre los puntos de mallas, definimos $b_{m+1/2,n} = \frac{1}{2}(b_{m+1,n} + b_{m,n})$ y $\xi_{m+1/2,n} = \frac{1}{2}(\xi_{m+1,n} + \xi_{m,n})$. De igual manera para los otros subíndices.

Así nuestra discretización vendría dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -(\eta_{1m,n} + \eta_{2m,n} + \eta_{3m,n} + \eta_{4m,n})P_{m,n+1} + \eta_{1m,n}P_{m+1,n} \\ &+ \eta_{2m,n}P_{m-1,n} + \eta_{3m,n}P_{m,n+1} + \eta_{4m,n}P_{m,n-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\eta_{1m,n} = \frac{b_{m+1/2,n}}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}}$, $\eta_{2m,n} = \frac{b_{m-1/2,n}}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}}$, $\eta_{3m,n} = \frac{b_{m,n+1/2}}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}}$ y $\eta_{4m,n} = \frac{b_{m,n-1/2}}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}}$.

3.1.2. Discretización en Malla Intercala Rotada

Usando rotación del plano tangente obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega\xi(x,z,\omega)}{K(x,z)}P(x,z,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial V_x(x,z,\omega)}{\partial x'} + \frac{\partial V_x(x,z,\omega)}{\partial z'} \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial V_z(x,z,\omega)}{\partial x'} + \frac{\partial V_z(x,z,\omega)}{\partial z'} \right] \\ -i\omega V_x(x,z,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b(x,z)}{\xi(x,z,\omega)} \left[\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x'} + \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z'} \right] \\ -i\omega V_z(x,z,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b(x,z)}{\xi(x,z,\omega)} \left[-\frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x'} + \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z'} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando Diferencias Finitas para mallas Intercalas en nuestro nuevo plano, obtenemos la siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial V_x}{\partial x'} \right]_{m,n} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta x} (V_{x_{m+1/2,n-1/2}} - V_{x_{m-1/2,n+1/2}}) \\ \left[\frac{\partial V_x}{\partial z'} \right]_{m,n} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (V_{x_{m+1/2,n+1/2}} - V_{x_{m-1/2,n-1/2}}) \end{aligned}$$

3.1. Discretización

De manera idéntica se obtienen las aproximaciones de $\left[\frac{\partial V_z}{\partial x'}\right]_{i,j}$ y $\left[\frac{\partial V_z}{\partial z'}\right]_{i,j}$

Ahora las aproximaciones para las derivadas parciales de P en estos puntos de mallas resultante de V_x y V_z vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial P}{\partial x'}\right]_{m+1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta x} (P_{m+1,n+1} - P_{m,n}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial x'}\right]_{m+1/2,n+1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta x} (P_{m+1,n} - P_{m,n+1}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial x'}\right]_{m-1/2,n+1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta x} (P_{m,n} - P_{m-1,n+1}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial x'}\right]_{m-1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta x} (P_{m,n-1} - P_{m-1,n}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial z'}\right]_{m+1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (P_{m+1,n} - P_{m,n-1}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial z'}\right]_{m+1/2,n+1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (P_{i+1,j+1} - P_{m,n}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial z'}\right]_{m+1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (P_{m,n+1} - P_{m-1,n}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial z'}\right]_{m+1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (P_{m+1,n} - P_{m,n-1}) \\
\left[\frac{\partial P}{\partial z'}\right]_{m-1/2,n-1/2} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\Delta z} (P_{m,n} - P_{n-1,n-1}).
\end{aligned}$$

Reemplazando estas discretizaciones anteriores en la ecuación 3.7 obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\Theta = & \kappa_{1m,n} P_{m+1,n-1} + \kappa_{2m,n} P_{m+1,n} + \kappa_{4m,n} P_{m+1,n+1} + \kappa_{4m,n} P_{m,n-1} + \kappa_{5m,n} P_{m,n} \\
& + \kappa_{6m,n} P_{m,n+1} + \kappa_{7m,n} P_{m-1,n-1} + \kappa_{8m,n} P_{m-1,n} + \kappa_{9m,n} P_{m+1,n+1}, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

donde

$$\kappa_{1m,n} = \frac{-1}{4h^2} b_{m+1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n} \xi_{m+1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n} \xi_{m,n-1/2}} \right]$$

$$\kappa_{2m,n} = \frac{1}{4h^2} \left(b_{m+1/2,n-1/2} \left[-\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] + b_{m+1/2,m+1/2} \left[-\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,m+1/2}} \right] \right)$$

$$\kappa_{3m,n} = \frac{1}{4h^2} b_{m+1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right]$$

$$\kappa_{4m,n} = \frac{1}{4h^2} \left(b_{m+1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] + b_{m-1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] \right)$$

$$\kappa_{5m,n} = \frac{1}{4h^2} \left(b_{m+1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] + b_{m-1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] + b_{m+1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right] + b_{m-1/2,n-1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right] \right)$$

$$\kappa_{6m,n} = \frac{1}{4h^2} \left(b_{m-1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right] + b_{m+1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m+1/2,n}} - \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right] \right)$$

$$\kappa_{7m,n} = \frac{1}{4h^2} b_{m-1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{z,j}\xi_{m,n+1/2}} \right]$$

$$\kappa_{8m,n} = \frac{1}{4h^2} \left(b_{m-1/2,n+1/2} \left[-\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right] + (b_{m-1/2,n-1/2} \left[-\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n-1/2}} \right]) \right)$$

$$\kappa_{9m,n} = \frac{-1}{4h^2} b_{m-1/2,n+1/2} \left[\frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m-1/2,n}} + \frac{1}{\xi_{m,n}\xi_{m,n+1/2}} \right]$$

3.1.3. Discretización del término Lumped Mass

Para la discretización del término $\frac{\omega^2}{K(x,z)}P(x, z, \omega)$ que se conoce como Lumped Mass es igual a la que se realizó en el capítulo 2 debido que este término no posee términos con derivadas.

$$\begin{aligned}\Sigma_{0^\circ} &= P(x_m, z_n) \approx \frac{1}{4}(P_{m+1,n} + P_{m-1,n} + P_{m,n+1} + P_{m,n-1}) \\ \Sigma_{45^\circ} &= P(x_m, z_n) \approx \frac{1}{4}(P_{m+n,m-n} + P_{m-1,n-1} + P_{m-1,n+1} + P_{m+1,n+1}),\end{aligned}$$

y combinando los términos anteriores obtenemos la aproximación para el Lumped Mass:

$$\frac{\omega^2}{K_{m,n}}P_{m,n} = \Phi(m_2, m_3) \approx \frac{\omega^2}{K_{m,n}}(m_2P_{m,n} + m_3\Sigma_{0^\circ} + m_4\Sigma_{45^\circ}) \quad (3.9)$$

$$\text{con } \frac{(1 - m_2 - 4m_3)}{4} = m_4.$$

3.1.4. Problema Inverso para la Discretización

A partir de las discretizaciones obtenidas anteriormente obtenemos un esquema óptimo de 9 puntos para la Ecuación Visco-Acústica en el dominio de la Frecuencia en 2D:

$$m_1\Gamma + (1 - m_1)\Theta + \Phi(m_2, m_3) = S_{m,n}, \quad (3.10)$$

donde Γ viene de la discretización usual Θ de la rotación del plano, Φ del Lumped Mass, $S_{m,n}$ la discretización de la fuente y m_1, m_2, m_3 son los parámetros obtenidos en el capítulo 2.

Así para un punto de la malla (x_m, z_n) , se tiene que la discretización del valor de la presión en este punto a partir de la ecuaciones 3.6, 3.8 y 3.9

viene dado por:

$$\begin{aligned}
 S_{m,n} = & \beta_{1_{m,n}} P_{m+1,n-1} + \beta_{2_{m,n}} P_{m+1,n} + \beta_{3_{m,n}} P_{m-1,n+1} + \beta_{4_{m,n}} P_{m,n-1} + \beta_{5_{m,n}} P_{m,n} \\
 & + \beta_{6_{m,n}} P_{m,n+1} + \beta_{7_{m,n}} P_{m-1,n-1} + \beta_{8_{m,n}} P_{m-1,n} + \beta_{9_{m,n}} P_{m+1,n+1}, \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

donde

- $\beta_{1_{m,n}} = (1 - m_1)\kappa_1 - \frac{\omega^2}{K_{m,n}}(\frac{m_2}{4} + m_3 - \frac{1}{4})$
- $\beta_{2_{m,n}} = m_1\eta_1 + -(1 - m_1)(\kappa_2) + \frac{\omega^2}{K_{m,n}}m_3$
- $\beta_{3_{m,n}} = (1 - m_1)\kappa_3 - \frac{\omega^2}{K_{m,n}}(\frac{m_2}{4} + m_3 - \frac{1}{4})$
- $\beta_{4_{m,n}} = m_1\eta_4 - (1 - m_1)\kappa_4 + m_3\frac{\omega^2}{K_{m,n}}$
- $\beta_{5_{m,n}} = m_2\frac{\omega^2}{K_{m,n}} - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4)m_1 - (1 - m_1)\kappa_5$
- $\beta_{6_{m,n}} = m_1\eta_1 - (1 - m_1)\kappa_6 + m_3\frac{\omega^2}{K_{m,n}}$
- $\beta_{7_{m,n}} = (1 - m_1)\kappa_7 - \frac{\omega^2}{K_{m,n}}(\frac{m_2}{4} + m_3 - \frac{1}{4})$
- $\beta_{8_{m,n}} = m_1\eta_2 - (1 - m_1)\kappa_8 + m_3\frac{\omega^2}{K_{m,n}}$
- $\beta_{9_{m,n}} = (1 - m_1)\kappa_7 - \frac{\omega^2}{K_{m,n}}(\frac{m_2}{4} + m_3 - \frac{1}{4})$

Ya que la discretización de P depende de dos valores (x_m, z_n) entonces su discretización corresponde a una matrix, por tanto reorganizamos de forma que nos resulte un vector y así poder armar el sistema $Ap = S$, donde p es un vector de tamaño $(N_x \cdot N_z) \times 1$ donde las primeras N_x entradas corresponde a la primera fila de P , las siguientes N_x entradas son la segunda fila de P y así sucesivamente. De igual manera se construye el vector S que corresponde a la discretización de la fuente. Por otra parte A es una matrix dispersa de 9 diagonales cuyas entradas no nulas son los coeficientes que acompañan $P_{i,j}$ de tamaño $N_x \cdot N_z \times N_x \cdot N_z$. Por ejemplo, supongamos que $N_x = 3$ y $N_z = 4$ entonces nuestro dominio seria:

3.1. Discretización

		x			
		0	1	2	3
z	0				
	1			$P_{2,1}$	
	2				

y por tanto nuestra matrix quedaría de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix}
 \beta_{50,0} & \beta_{60,0} & 0 & \beta_{90,0} & \beta_{20,0} & \beta_{10,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \beta_{40,1} & \beta_{50,1} & \beta_{60,1} & 0 & \beta_{90,1} & \beta_{20,1} & \beta_{10,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \beta_{40,2} & \beta_{50,2} & \beta_{60,2} & 0 & \beta_{90,2} & \beta_{20,2} & \beta_{10,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \beta_{30,3} & 0 & \beta_{40,3} & \beta_{50,3} & \beta_{60,3} & 0 & \beta_{90,3} & \beta_{20,3} & \beta_{10,3} & 0 & 0 & 0 \\
 \beta_{81,0} & \beta_{31,0} & 0 & \beta_{41,0} & \beta_{51,0} & \beta_{61,0} & 0 & \beta_{91,0} & \beta_{21,0} & \beta_{11,0} & 0 & 0 \\
 \beta_{71,0} & \beta_{81,1} & \beta_{31,1} & 0 & \beta_{41,1} & \beta_{51,1} & \beta_{61,1} & 0 & \beta_{91,1} & \beta_{81,1} & \beta_{11,1} & 0 \\
 0 & \beta_{71,2} & \beta_{21,2} & \beta_{31,2} & 0 & \beta_{41,2} & \beta_{51,2} & \beta_{61,2} & 0 & \beta_{91,2} & \beta_{21,2} & \beta_{11,2} \\
 0 & 0 & \beta_{71,3} & \beta_{81,2} & \beta_{31,3} & 0 & \beta_{41,3} & \beta_{51,3} & \beta_{61,3} & 0 & \beta_{91,3} & \beta_{21,3} \\
 0 & 0 & 0 & \beta_{72,0} & \beta_{82,0} & \beta_{32,0} & 0 & \beta_{42,0} & \beta_{52,0} & \beta_{62,0} & 0 & \beta_{92,0} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{72,1} & \beta_{82,1} & \beta_{32,1} & 0 & \beta_{42,1} & \beta_{52,1} & \beta_{62,1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{72,2} & \beta_{82,2} & \beta_{32,2} & 0 & \beta_{42,2} & \beta_{52,2} & \beta_{62,2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{72,3} & \beta_{82,3} & \beta_{32,3} & 0 & \beta_{42,3} & \beta_{52,3}
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{0,0} \\ P_{0,1} \\ P_{0,2} \\ P_{0,3} \\ P_{1,0} \\ P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{2,0} \\ P_{2,1} \\ P_{2,2} \\ P_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{0,0} \\ S_{0,1} \\ S_{0,2} \\ S_{0,3} \\ S_{1,0} \\ S_{0,1} \\ S_{0,2} \\ S_{0,3} \\ S_{2,0} \\ S_{2,1} \\ S_{2,2} \\ S_{2,3} \end{pmatrix}$$

3.1.5. Ejemplos

¹ A partir de la discretización expuesta en las secciones anteriores para la Ecuación de Onda para un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias podemos obtener soluciones numéricas para dicha ecuaciones para diferentes modelos de velocidad y frecuencias. Para la condiciones de frontera usaremos las PMLs expuesta en la sección 1.1.

La función de atenuación $\xi(\mathbf{x}, \omega)$ es igual a $1 + i \frac{\gamma(x)}{\omega}$ en el interior de nuestro dominio donde γ es la función de damping que es igual $\gamma(x) = \frac{1}{Q(\mathbf{x})}$, donde $Q(\mathbf{x})$ se conoce como el factor de calidad, que depende de las propiedades del medio [3] y en la región de la frontera esta función viene dada por la ecuación

¹Los código utilizados en estos ejemplo fueron desarrollados por Sheryl Avendaño en colaboración de mi persona

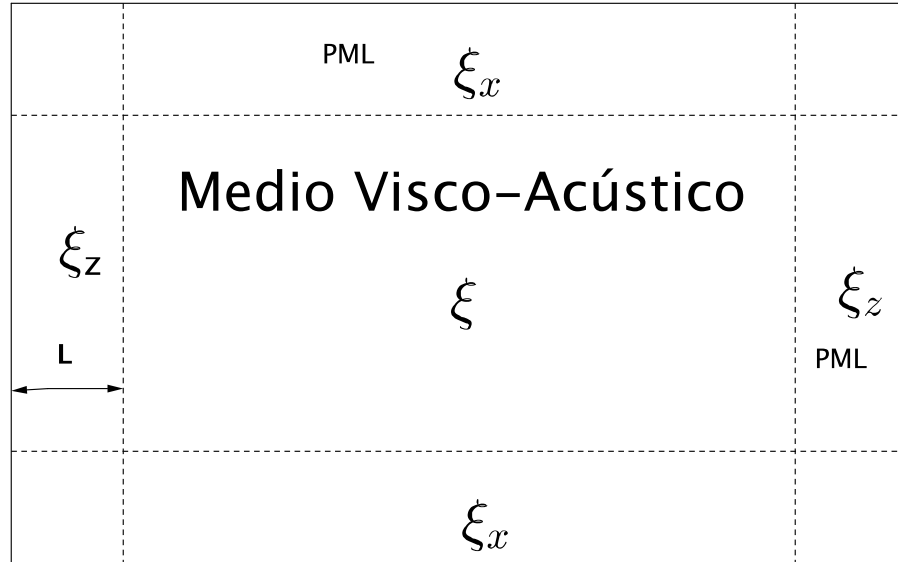


Figura 3.1: Representación de Fronteras PML en un dominio de 2D.

1.1.2,

$$\begin{aligned} \gamma_x(x) &= a \cos\left(\frac{x}{x_{pml}} \frac{\pi}{2}\right) && \text{para } x < x_{pml} \\ \gamma_x(x) &= a \left(1 - \cos\left(\frac{x-Lx-x_{pml}}{x_{pml}} \frac{\pi}{2}\right)\right) && \text{para } x > x_{pml} + Lx, \end{aligned}$$

donde L el ancho de la PML es inversamente proporcional al valor de la frecuencia, a mayor valor de la frecuencia menor el el espesor de la PML y de igual manera para el valor de a dependerá de la frecuencia del mismo modo que la longitud de la PML. Esto anterior debido a que mayor la frecuencia, la atenuación será mayor por tanto la onda decaerá mas rápidamente en la PML que a frecuencias menores, por esto se usan valores de menor magnitud en las altas frecuencias. Como definimos la PML para γ_x , se hace una igual definición para γ_z .

Para la densidad ρ , se usa una función que asocia la densidad con la

velocidad con la siguiente ecuación de física de rocas, que se construyo mediante un ajuste estadístico en [21].

$$\rho = \begin{cases} [aC(\mathbf{x})^5 - bC(\mathbf{x})^4 + cC(\mathbf{x})^3 - dC(\mathbf{x})^2 + eC(\mathbf{x})] * 10^3 [Kg/m^3] & c(\mathbf{x}) > 1480[m/s] \\ 1050 [Kg/m^3] & c(\mathbf{x}) < 1480[m/s], \end{cases}$$

donde $C[\mathbf{x}] = c(\mathbf{x}) * 10^{-3} [Km/s]$ [21]. Esta relación de la densidad viene de un estudio hecho en [21] de fisica de rocas.. Las constantes tiene un valor de $a = 0.000106$, $b = 0.0043$, $c = 0.0671$, $d = 0.4721$ y $e = 1.6612$.

3.2. Estabilidad

Como expusimos en la sección B.1, una manera de analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones es mediante número de condición de la matriz asociada al sistema. En esta sección mostraremos como el número de condición de la matriz obtenida de la discretización de la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico se ve afectado para diferentes frecuencias propias del medio

Dado que nuestro sistema posee un número de condición alto para diferentes frecuencias y tamaño de dominios de muestreo es pertinente preconditionar. En la sección B.1.2 mostramos que para preconditionar un sistema se debe multiplicar por una matriz muy cercana a la inversa para que la matriz resultante tuviera un mejor número de condición. Y por último resolveremos el sistema lineal obtenido de la discretización de la ecuación 1.3 por los métodos iterativos *GMRES*, *QMR* y *Bicgstab* [6] sin preconditionamiento y con preconditionamiento.

Para un dominio de $500mt \times 500mt$, fijando 9 puntos de malla por longitud de onda, para una velocidad minima de $2100m/s$ para cada modelo de velocidad que se muestran en la figuras 3.2, donde figura representa el

3.2. Estabilidad

dominio de estudio y cada color representa un valor de la velocidad en cada punto del dominio y valor de la atenuación para cada capa de los respectivos modelos de velocidad, se obtuvieron las tablas 3.1, 3.2 y las figuras 3.3, 3.4 y 3.5, para frecuencias de $3Hz$ hasta $43Hz$.

Las tablas 3.1 corresponde al número de condición para la matriz que se obtiene de la discretización de la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico mediante un esquema de 9 puntos, donde Fr. corresponde la frecuencia, N. Cond al número de condición y Modelo 1, Modelo 2 y Modelo 3 corresponde a la representación de la matriz de cada modelo de velocidad que se muestra en la figura 3.2 dada en km/s . De la misma manera las tablas 3.2 muestra el número de condición de la matriz que se obtiene de la discretización de la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico mediante un esquema de 9 puntos pero con preconditionamiento con la factorización LU incompleta.

Las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 muestran para cada modelo de velocidad que se muestra en la figura 3.2, los diferentes valores de número de condición para cada frecuencia respectivamente, para los preconditionamientos expuesto en el capítulo B.

Como se puede evidenciar en las tablas 3.1, 3.2 y gráficas 3.3, 3.4 y 3.5, los preconditionamientos mencionas en la sección B.1.2 no se obtuvieron mejoras significativas para la estabilidad de la matriz obtenida de la discretización de la ecuación 1.3. Solo para el caso de la factorización LU incompleta, la mejora fue evidente.

Capítulo 3. Modelado para la Ecuación Visco-Acústica 2D en el dominio de las frecuencias

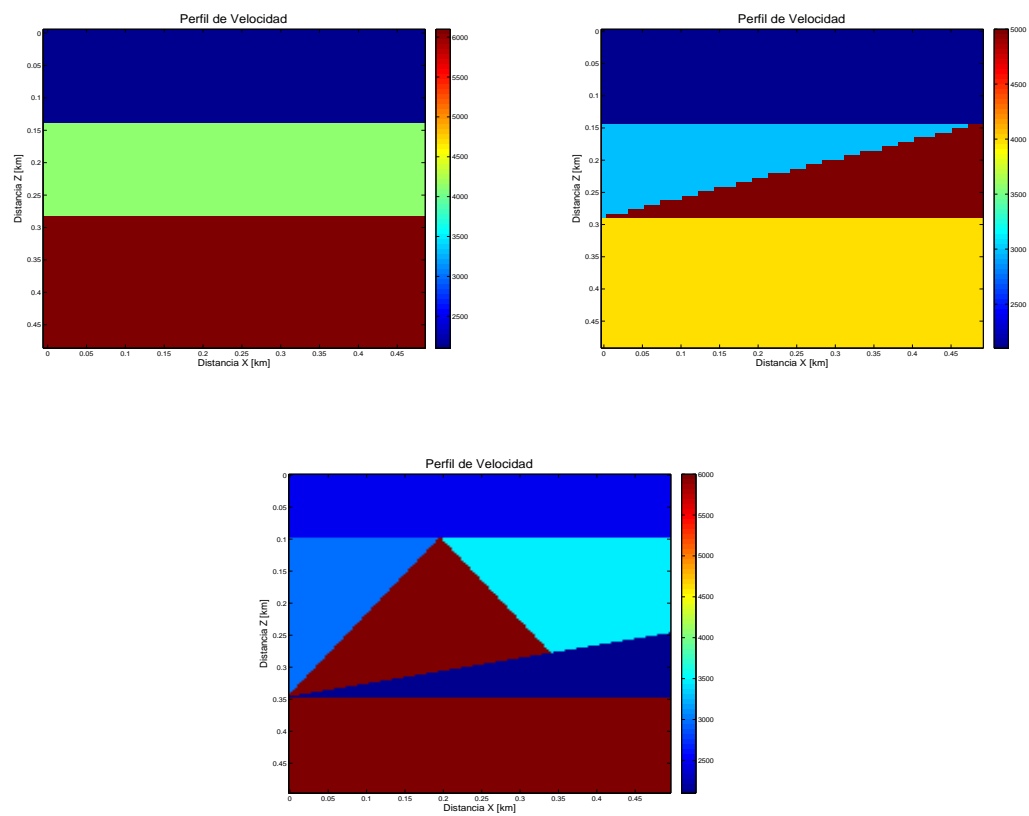


Figura 3.2: Modelos de velocidad 1, 2 y 3 respectivamente en km/s

3.2. Estabilidad

Modelo 1

Fr.	N.Cond
3	306.35
8	1176.58
13	1534.49
18	2776.1
23	3139.42
38	3825.56
33	4354.21
38	5010.59
43	4533.64

Modelo 2

Fr.	N.Cond
3	309.18
8	821.78
13	1342.85
18	1640.11
23	1990.64
28	2327.83
33	2825.51
38	3451.33
43	3495.44

Modelo 3

Fr.	N.Cond
3	338.49
8	944.45
13	2009.02
18	2220.49
23	2980.74
28	3238.38
33	3699.96
38	4467.88
43	4495.33

Tabla 3.1: Número condición sin preconditionamiento

Modelo 1

Fr.	N.Cond
3	1.001362
8	1.0116896
13	1.031204
18	1.055093
23	1.088614
28	1.126212
33	1.122060
38	1.178110
43	1.204343

Modelo 2

Fr.	N.Cond
3	1.001602
8	1.010207
13	1.021366
18	1.026856
23	1.038788
28	1.039257
33	1.060400
38	1.071993
43	1.088945

Modelo 3

Fr.	N.Cond
3	1.001047
8	1.010734
13	1.026420
18	1.057406
23	1.058417
28	1.080892
33	1.120449
38	1.112741
43	143921

Tabla 3.2: Número condición con preconditionamiento

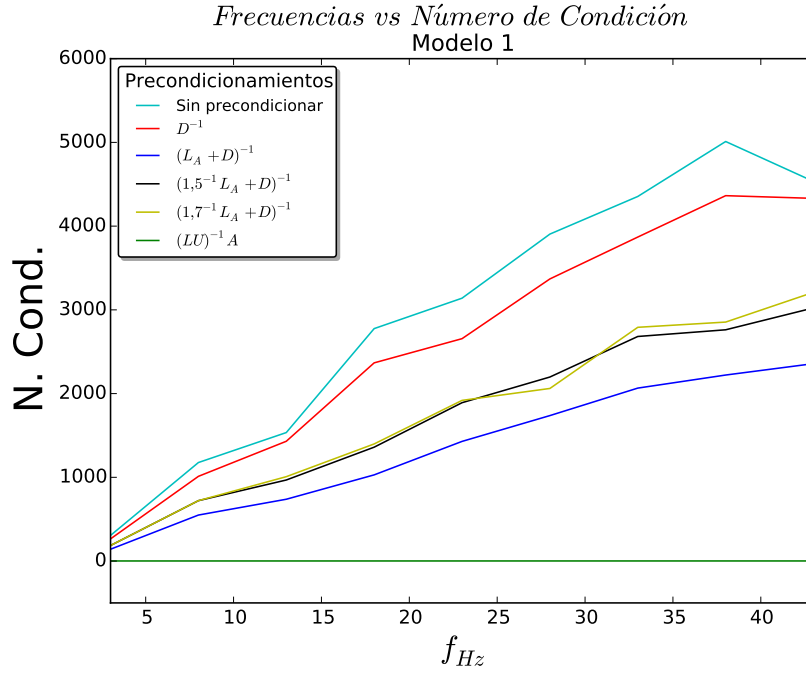


Figura 3.3: Número de condición para el modelo 1

Para observar como afecta el preconditionamiento al solucionar un sistema de ecuaciones usamos tres métodos iterativos para resolver sistemas lineales, los cuales son:

1. **GMRES**: Generalized minimum residual method.
2. **QMR**: Quasi-minimal residual method.
3. **Bicgstab**: Biconjugate gradients stabilized method [6].

Usando fuente Ricker multiplicada por un delta de Dirac que corresponde a la posición de la fuente ubicada en la parte superior central del dominio obtuvimos un sistema de ecuaciones $AP = F$ donde A es la matriz obtenida de la discretización, P corresponde al campo de presiones y F la fuente.

3.2. Estabilidad

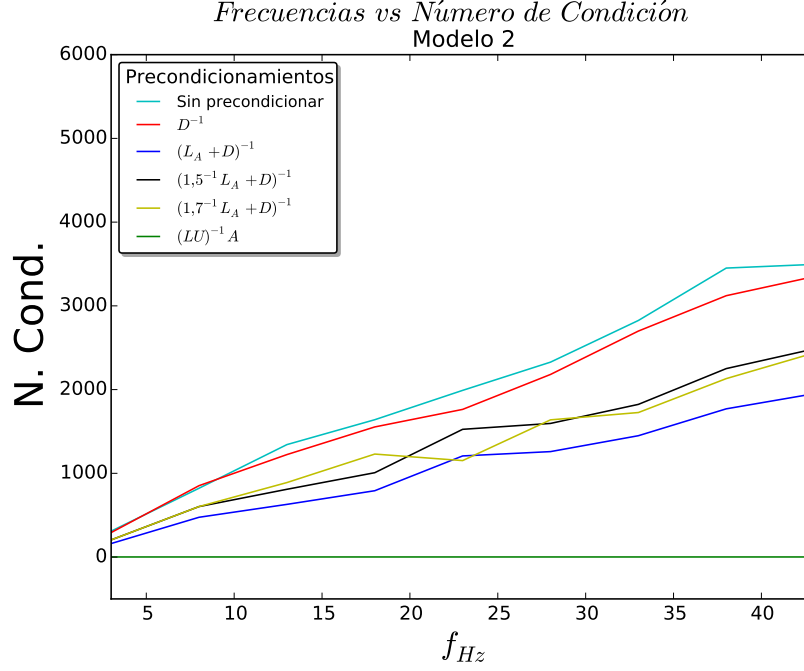


Figura 3.4: Número de condición para el modelo 2

Recordemos que la fuente viene dada por:

$$S(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \nabla \cdot \left(\frac{b(\mathbf{x})}{\xi(\omega, \mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \right)$$

y cuando la multiplicamos por la delta de Dirac en el punto deseado de la posición de la fuente obtenemos que

$$S(\mathbf{x}_0, \omega) = \frac{b_{x_0, z_0}}{\xi_{x_0, z_0}^2} (\nabla \cdot \mathbf{F}),$$

con (x_0, z_0) la ubicación de la fuente, $-(\nabla \cdot \mathbf{F}) = H$ y H es un función Ricker, donde $H = \frac{b}{\xi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f^2}{f_M^3} e^{-\frac{f^2}{f_M^2}}$, con f la frecuencia propia del medio y f_M la frecuencia de la Ricker, que es igual a $50Hz$ [3]. se obtuvieron las tablas 3.2 y 3.4, donde se puede ver para cada modelo de velocidad de las figuras 3.2 y 4 diferentes frecuencias, el número de iteraciones necesarias para la convergencia de cada método sin preconditionamiento y con preconditionamiento con la

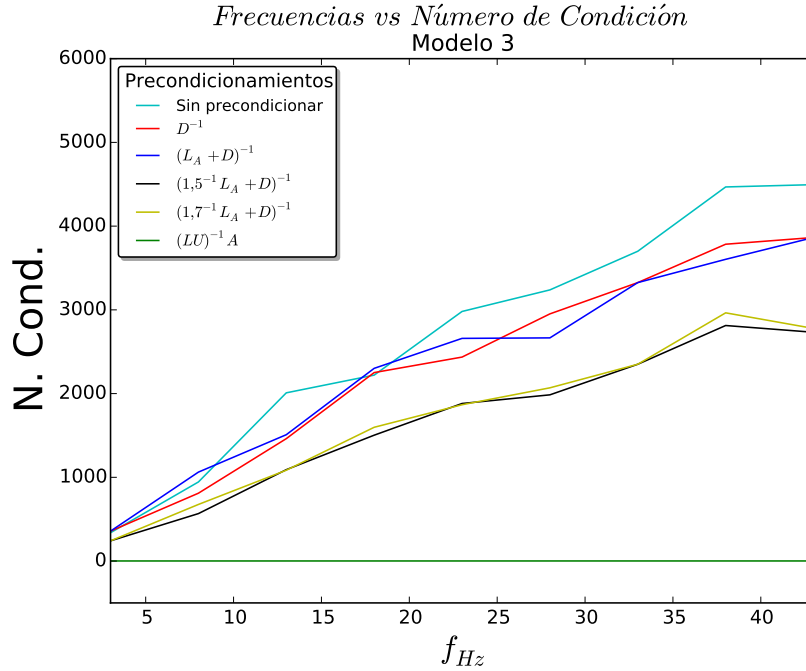


Figura 3.5: Número de condición para el modelo 3

factorización LU incompleta.

A partir de la gráficas 3.3,3.4 y 3.5 y tablas 3.2 y 3.4 se puede concluir para la solución de la ecuación diferencial parcial que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias en dos dimensiones:

1. Cuando la matriz asociada a la discretización de la EDP tiene un problema de estabilidad, la convergencia con métodos iterativos es lenta o en el peor de los casos nunca se encuentra una respuesta acercada a la deseada como se muestra en las tablas 3.4 y 3.2.
2. Cuando la matriz no tiene propiedades como diagonal dominante o simétrica, los métodos de preconditionamiento enunciados en el capítulo

3.2. Estabilidad

	GMRES	QMR	Bicgstab		GMRES	QMR	Bicgstab
3Hz	61	67	77	3Hz	63	65	74
12Hz	1248	1461	1214	12Hz	524	945	1352
25Hz	1248	1461	1214	25Hz	949	2513	2699
43Hz	1991	2128	1895	43Hz	1589	3782	4306

	GMRES	QMR	Bicgstab
3Hz	60	65	77
12Hz	494	818	1018
25Hz	1142	2197	2260
43Hz	1821	3374	3394

Tabla 3.3: Métodos iterativos para los modelos 1, 2 y 3 respectivamente, sin preconditionamiento, donde cada valor corresponde al número de iteraciones.

3, el único que es óptimo es el correspondiente a la factorización incompleta LU como se puede visualizar en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5.

3. Cuando se posee poco recursos computacionales, los métodos iterativos son una buena herramienta para solucionar problemas inversos debido a su bajo consumo de memoria.

	GMRES	QMR	Bicgstab
3Hz	2	2	1
12Hz	2	2	1
25Hz	2	3	1
43Hz	2	3	3

	GMRES	QMR	Bicgstab
3Hz	2	2	1
12Hz	2	2	1
25Hz	2	3	1
43Hz	2	3	3

	GMRES	QMR	Bicgstab
3Hz	2	2	1
12Hz	2	3	1
25Hz	2	3	1
43Hz	2	3	3

Tabla 3.4: Métodos iterativos para los modelos 1, 2 y 3 respectivamente, con preconditionamiento LU, donde cada valor corresponde al número de iteraciones.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se propuso estudiar el proceso de modelado para una onda que se propaga en un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias, es decir encontrar métodos óptimos para solucionar la ecuación que modela dicha propagación para cuando se realizara el proceso de FWI este fuera lo óptimo y con la menor dispersión numérica posible

Para esto el trabajo se dividió en dos etapas. La primera estudiar una técnica para obtener la discretización de la EDP que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico y por otra parte la segunda etapa después de haber obtenido la discretización consistió en buscar una técnica que resolviera métodos inversos para solucionar la discretización que se obtuvo de la etapa anterior.

Para la primera etapa se estudiaron diferentes tipos de métodos como lo son elementos finitos y diferencias finitas, pero se optó por este último, diferencias finitas pero utilizando un variante introducida en [12] que mejoraba la dispersión numérica, que básicamente consiste en aproximar la ecuación diferencial mediante la diferencias finitas con el plano usual y el plano rotado.

Este método mejora con mucha diferencia la dispersión numérica, la exactitud de la solución y la utilización de menos puntos de malla.

En este trabajo se presento un mejora para el método, ya que este método fue resuelto para cuando el medio es acústico y nosotros lo usamos para un medio acústico con atenuación. Estos medio difieren de la naturaleza de número de onda, si es real corresponde al caso acústico y si este es complejo el medio es acústico con atenuación. Al ser el número complejo la solución del método se vuelve un poco mas compleja

Para la solución del sistema lineal que se obtiene se estudiaron diferentes métodos de preconditionamiento, como se exponen en el capítulo 3 para resolver los sistemas lineales mediante métodos iterativos así estos métodos sean convergente y de manera mas rápida. Se mostró que el único método eficiente de preconditionamiento para la solución de la ecuación que modela la propagación de una onda en un medio visco-acústico en el dominio de las frecuencias en 2 dimensiones es la factorización LU incompleta

Para trabajos futuros es analizar como se propagan los errores y la eficiencia computacional de lo métodos usados en esta tesis cuando se le aplica el proceso FWI para recuperar la información de la velocidad de la propagación de la onda. Otra posible trabajo es buscar la manera de mejorar el método de discretización usando diferentes técnicas o combinaciones de estas, como realizar la optimización no con la solución a una onda plana sino con la solución en funciones de Hankel.

Apéndice A

Diferencias Finitas

Esta técnica consiste en usar ecuaciones en diferencias para aproximar las derivadas de diferentes ordenes a valores de la función a encontrar. Estas aproximaciones se hacen a partir del Teorema de Taylor, ya sea en una o varias variables. A continuación mostraremos las dos versiones del Teorema de Taylor, teoremas que son ampliamente usados en el Análisis Numérico y uno de esos usos es aproximar derivadas de cualquier orden mediante valores de la función a encontrar, resultando en ecuaciones en diferencias.

Primero enunciaremos el Teorema de Taylor en una variable y luego su versión en varias variables

A.0.1. Teoremas de Taylor

Teorema A.1. Teorema de Taylor en una variable

Sea $f \in C^n[a, b]$, tal que f^{n+1} existe en $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$, existe $\xi(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x); \tag{A.1}$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

[6].

Cuando hacemos una aproximación de f con respecto a P_n decimos que n es el orden de la aproximación y R_n es el residuo. En el caso de que $f \in C^\infty[a, b]$ entonces obtenemos la serie de Taylor.

Por ejemplo si $f(x)$ es una función suave, entonces aplicándole el Teorema de Taylor en $x + h$ y $x - h$ alrededor de x y de orden n obtenemos las siguientes expresiones respectivamente

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + O(h^n) \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-h)^n + O(h^n) \end{aligned}$$

donde $O(h^n)$ es una función infinitesimal, i.e., $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h^n)}{h^n} = c$ donde c es una constante, el orden de potencia de h en la función infinitesimal se le llama el orden de convergencia de la aproximación de Diferencias Finitas. A partir de las dos ecuaciones anteriores podemos obtener las aproximaciones de diferencias finitas de la derivadas de orden 1 y 2.

El Teorema anterior está enunciado para una sola variable, a continuación enunciamos su versión en varias variables. Usando la notación de Multiíndices tenemos:

Definición A.1. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces definimos:

- $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
- $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Teorema A.2. Teorema de Taylor en Varias variables

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable k – veces en $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe $h_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha(x) (x - a)^\alpha \quad (\text{A.2})$$

y $\lim_{x \rightarrow a} h_\alpha(x) = 0$ [22].

De igual manera que el Teorema de Taylor en una variable diremos que k es el orden de la aproximación mediante Series de Taylor, y h_a se le llama el residuo. Por ejemplo, sea $P(x, z) = e^{x+z}$ una función real valuada suave y sean $h \in \mathbb{R}$ entonces aplicando el teorema de Taylor de orden 3 en $(x - h, z - h)$ alrededor de (x, z) tenemos que

$$P(x - h, z - h) = e^{x+z} + 2e^{x+z}h + 3e^{x+z}\frac{h^2}{2!} + 4e^{x+z}\frac{h^3}{3!} + O(h^3)$$

A.0.2. Aproximaciones Por Diferencias Finitas

A partir de las versiones del Teorema de Taylor enunciadas podemos deducir las siguientes aproximaciones de Diferencias Finitas para las derivadas de primer y segundo orden.

- **Diferencias Finitas hacia adelante:** Utilizando la ecuación A.2 de orden 2 obtenemos la siguiente expresión para f'

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

- **Diferencias Finitas hacia atras:** De la misma manera que la aproximación anterior, pero usando A.3 obtenemos la siguiente aproximación para f'

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

Las dos aproximaciones anteriores, son aproximaciones no muy buenas debido que su orden de convergencia es uno, es decir, que para una mayor exactitud necesitamos que h sea muy pequeño, lo que implicaría mayor cantidad de puntos en el dominio de la ecuación diferencial, por ende mas costo computacional a la hora de resolver una ecuación.

Para mejorar la aproximación de la primera derivada mediante Diferencias Finitas utilizamos la expansión de Taylor de A.2 y A.3 de orden 2 y restándolas obtenemos una mejor aproximación, que es la siguiente.

Diferencias finitas centradas

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Como vemos al ser de orden de convergencias de orden 2 se obtiene mejores aproximaciones con menor cantidad de puntos, i.e, se mejora el costo computacional y la calidad de la solución

Para obtener una aproximación a una derivada de orden dos, utilizamos la expansión de la serie de Taylor de orden dos.

Diferencias finitas para derivadas de segundo orden

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Todas las aproximaciones anteriormente descritas son las más utilizadas en Diferencias Finitas, pero de todos modos como su orden de convergencia es bajo, se introducen otras aproximaciones con mejor orden de convergencia.

- Diferencias Finitas para la primera derivada de orden 4

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4)$$

- Diferencias Finitas para la segunda derivada de orden 4

$$f''(x) = \frac{-f(x+3h) + 8f(x+2h) - 13f(x+h) + 13f(x-h)}{12h^2} + \frac{-8f(x-2h) + f(x-3h)}{12h^2} + O(h^4) \quad [24].$$

Después de haber obtenido una discretización de una Ecuación Diferencial mediante Diferencias Finitas, una forma de obtener la Solución Numérica a la Ecuación Diferencial, es convertir esta discretización en un problema Inverso, i.e, a un problema de la forma $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{s}$, donde \mathbf{A} es una matrix conocida como la matriz de Diferencias Finitas, \mathbf{p} es un vector donde las entradas son los valores de la función y \mathbf{s} son valores de la igualdad de la ecuación, por ejemplo en la ecuación 1.3, \mathbf{p} corresponde a la discretización del Campo de Presiones y \mathbf{s} a la Fuente. Podemos visualizar mejor esto en el siguiente ejemplo

Por ejemplo, sea $u''(x) = f(x)$ una ecuación diferencial con $x \in [a, b]$ y $u(a) = 0$ y $u(b) = 0$ condiciones de frontera para el problema. Entonces aplicandole Diferencias Finitas a la ecuación anterior obtenemos la siguiente expresión

$$f(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{A.3})$$

donde $x_n = a + (n - 1)h$ con $n \in 0, 1, \dots, l$, $h = (b - a)/l$ y l es el número puntos que particiona $[a, b]$. Si denotamos $\mathbf{u}_n = u(x_n)$ y $\mathbf{f}_n = f(x_n)$ entonces podemos transformar nuestro esquema de Diferencias Finitas para solucionar nuestra ecuación en el siguiente problema inverso:

$$A_{fd}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{A.4}$$

donde A_{fd} es una matriz simétrica de tamaño $(n - 1) \times (n - 1)$, llamada la matrix de diferencias finitas definida como

$$A_{fd} = h^{-2}\text{tridiag}_{n-1}(1, -2, 1) \tag{A.5}$$

$\mathbf{u}^T = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1})$ y $\mathbf{f}^T = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1})$. La solución a la ecuación diferencial viene dada por:

$$\mathbf{u} = (A_{fd})^{-1}\mathbf{f} [1].$$

[1].

Apéndice B

Problemas Inversos

Un problema inverso consiste en recuperar información de parámetros de un modelo a partir de una observación. Este tipo de problemas son muy comunes en los problemas de Astronomía, Ingeniería, Medicina, etc., en particular para nuestro caso, en Geofísica.

Una manera de aplicar la teoría de Problemas Inversos en la Geofísica, es solucionar la discretización obtenida a partir de diferencias finitas de una EDP que modela la propagación de una Onda, como lo vimos en la sección anterior.

Definición B.1. Consideremos el siguiente problema

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{d}, \tag{B.1}$$

donde \mathbf{d} es un conjunto de datos de observados, \mathbf{x} el conjunto de parámetros y F es una función que relaciona a \mathbf{x} y \mathbf{d} . Entonces decimos que es un problema *directo* si F y \mathbf{x} son dados y \mathbf{d} desconocido. Y es un problema *inverso* si F y \mathbf{d} son dados y \mathbf{x} es desconocido [1].

Un problema clásico de los problemas inversos es solucionar sistemas de

la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que representa un sistema de ecuaciones. Pero como es conocido estos problemas pueden acarrear inconvenientes por las soluciones que se obtienen, debido que esta solución puede no existir, ser única (que es el caso ideal) o tener mas de una solución. Para esto se introducen los siguientes conceptos

- Un problema es bien condicionado (*well posed*) si tiene solución, si tal solución es única y si es estable el problema. Esto último se explicara mas adelante.
- Es mal condicionado (*ill posed*) si no cumple alguna de las condiciones anteriores.

Una manera para solucionar un problema inverso mediante métodos numéricos, basicamente consiste en aproximarse a la solución mediante una discretización del dominio.

Definición B.2. Un método numérico para aproximar la solución de B.2, consiste en una secuencia de aproximaciones del problema

$$F_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{d}_n \quad n \geq 1, \quad (\text{B.2})$$

dependiente de un parámetro n (se define paso a paso). Se entiende que se espera que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, la solución numérica converge a la solución exacta. Por esto, es necesario que $\mathbf{d}_n \rightarrow \mathbf{d}$ y F_n "se aproxime" a F , cuando $n \rightarrow \infty$ [1].

Un ejemplo es el caso de diferencias finitas expuesto en las secciones anteriores. En este ejemplo tomamos una ecuación diferencial donde $F = \frac{d^2}{dx^2}$, $x = u$ y $d = f$ y lo aproximamos mediante diferencias finitas.

Por otro lado se necesita garantizar que los métodos usados son consistentes para esto introducimos la siguiente definición.

B.1. Estabilidad de un Sistema Lineal y Precondicionamiento

Definición B.3. Decimos que la aproximación de F dada en B.2 es *consistente* si

$$(F_n(\mathbf{x}) - \mathbf{d}_n) - (F(\mathbf{x}) - \mathbf{d}) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad n \rightarrow \infty$$

donde \mathbf{x} es la solución a B.2 correspondiente a los datos \mathbf{d} . Además decimos que es *fuertemente consistente*. Sí $F_n(\mathbf{x}) = \mathbf{d}$ para cualquier valor de n , no únicamente para $n \rightarrow \infty$ [1].

A modo de ejemplo verifiquemos que la aproximación para el ejemplo de diferencias finitas es consistente. Usando El teorema de Taylor en su versión de una sola variable para la expresión A.3 obtenemos que $u_{n-1} =$

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$
$$u_{n+1} = u - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^4)$$

Por tanto

$$\frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)$$

Aplicando la definición B.3 obtenemos el resultado requerido ya que cuando $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$

B.1. Estabilidad de un Sistema Lineal y Precondicionamiento

Como vimos en A, solucionar una Ecuación Diferencial de manera numérica se puede transformar en solucionar un sistema lineal de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, es decir, se puede ver como un problema inverso. Muchos de estos sistemas lineales son grandes, es decir, las matrices resultantes son fácilmente de tamaño $10^5 \times 10^5$ o superior, por lo que se necesita de herramientas computacionales. Actualmente existen dos maneras de solucionar estos sistemas de tales dimensiones, mediante métodos iterativos o métodos directos.

Los métodos directos consisten en solucionar el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mediante diferentes técnica numéricas, como factorización LU. Los resultados obtenidos por estos métodos directos son soluciones con error del orden de 10^{-10} , pero tiene un inconveniente, el consumo de memoria del computador. Por otra parte los métodos iterativos consisten en minimizar la función $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$, mediante diferentes técnicas como GMRES, QMS, entre otros. Estas herramientas han sido muy estudiadas en el Análisis Numérico que al ser métodos iterativos, realizan pequeños cambios de \mathbf{x} hasta encontrar un valor óptimo. Lo métodos iterativos tiene la ventaja frente a lo directos debido al menor consumo de memoria pero tiene una desventaja que se ven afectados por la estabilidad de la matriz \mathbf{A} .

La estabilidad de un sistema tiene que ver con que tanto afecta los pequeños cambios al sistema a la solución, es decir, si a pequeños cambios de \mathbf{A} y \mathbf{b} , que tanto se ve afectado la solución \mathbf{x} . Una manera de medir la estabilidad del sistema de ecuaciones se conoce como el *Número de Condición* de la matriz. Si el número de condición es cercano al uno, el sistema sera estable y si este número es grande, la solución se vera afectada [23].

Para solucionar el problema cuando el número de condición es grande, existe una técnica conocida como Precondicionamiento, que básicamente consiste en multiplicar la matriz \mathbf{A} por otra matriz M^{-1} de tal manera que la matriz resultante tenga un número de condición menor, así el sistema presentará una mejor estabilidad. La matriz M debe ser una matriz con una inversa fácil de calcular, como una matriz diagonal o tridiagonal, de tal forma que sea cercana a la inversa de A .

B.1.1. Número de Condición

Decimos que un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con solución, es estable o está bien condicionado, cuando pequeñas variaciones en sus coeficientes, o en sus términos independientes, producen una pequeña variación en la solución. Para medir estas variaciones se introduce la noción de número de condición.

Por ejemplo, supongamos una pequeña variación en b , es decir, Δb , la cual producirá una perturbación Δx en x , entonces obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}\end{aligned}$$

Podemos obtener: $\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b} \rightarrow \Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$, utilizando desigualdad de norma de operadores se tiene:

$$\begin{aligned}\|\Delta\mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{x}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\| \\ \|\mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\|\end{aligned}$$

Donde $\|\mathbf{A}\|$ es una norma inducida de matrices y de las desigualdades anteriores obtenemos

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (\text{B.3})$$

El factor $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$ es el que se conoce como número de condición de la matriz [23].

Definición B.4. Número de Condición de una Matriz

El *número de condición* de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es definida como

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (\text{B.4})$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma de matrices inducida [1].

De la ecuación B.3 podemos notar que cuando hay pequeños cambios en b y grandes cambios en x , el $K(A)$ es muy grande. Para este caso decimos que la matriz es mal condicionada. Y cuando sucede lo contrario, es decir, Δb pequeño y Δx pequeño estará bien condicionada. En general $K(A)$ depende de la escogencia de la norma [1].

Propiedades del Número de Condición

- Tenemos que $K(A) \geq 1$ ya que:

$$1 = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = K(A).$$

- $K(A^{-1}) = K(A)$.
- Sí A es ortogonal entonces $K(A) = 1$.
- Sí A es singular entonces su número de condición es infinito.
- $\forall \alpha \in \mathbb{C} \ K(\alpha A) = K(A)$
- $K_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$, donde $\sigma_1(A)$ y $\sigma_n(A)$ son los valores singulares menor y mayor respectivamente.

El Número de Condición de una matriz nos permite analizar que ocurre cuando hacemos pequeños cambios al sistema que tanto afecta nuestra solución. Este análisis es muy importante en los métodos iterativos dado que estos se valen de hacer pequeños cambios a \mathbf{x} hasta llegar al valor óptimo que minimiza la función $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ y además nos permite observar que pasa cuando perturbamos el sistema $Ax = b$ de manera $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$. Con el teorema que expondremos a continuación podremos observar con respecto al número de condición los pequeñas perturbaciones en la solución.

B.1. Estabilidad de un Sistema Lineal y Precondicionamiento

Teorema B.1. *Supongamos que A es una matriz no singular y*

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

entonces la solución \tilde{x} de $(A + \delta A)\tilde{x} = b + \delta b$ aproxima la solución x de $Ax = b$ con el error estimado

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)\|A\|}{\|A\| - K(A)\|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right) \quad (\text{B.5})$$

[1].

El teorema anterior nos permite computar una cota para el error relativo de la solución al sistema cuando se le hace una pequeña variación δ , tal cota dependerá del número de condición. Por otro lado cuando estamos trabajando con métodos numéricos computacionales iterativos y conocemos el valor de tolerancia, podemos a partir de la desigualdad anterior obtener una cota para el número de condición para que nuestra solución tenga una muy buena aproximación.

Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema, donde su número de condición es $K(A) = 15999$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, lo que es número de condición alto

$$\begin{bmatrix} 3.333 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.612 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene como solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$ pero realizando reducción Gaussiana con precisión de 5 dígitos, el redondeo numérico introduce una perturbación tal que se obtiene la solución $\tilde{x} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$ y

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.2001,$$

donde se puede observar que es un error porcentual del 20%. [6]

B.1.2. Precondicionamiento

Cuando se trabaja con métodos iterativos, las soluciones a los sistema de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ puede que no se llegue a una aproximación de la solución real o que la respuesta obtenida sea errónea. En estos casos el problema se debe al mal condicionamiento del sistema que afecta negativamente la convergencia a la solución real. En estos casos es necesario mejorar el condicionamiento del problema utilizando una técnica conocida como precondicionamiento. El precondicionamiento es una técnica que consiste en transformar el sistema en otro multiplicando por una matriz M de tal forma que su número de condición disminuya, es decir, sea M una matriz de tal forma

$$MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}$$

tal que

$$K(MA) < K(A).$$

El menor valor posible de $K(MA)$ es uno, es decir podemos obtener $M = A^{-1}$, pero al obtener la inversa de A estaríamos resolviendo el problema de manera directa. Por tanto para disminuir el número de condición multiplicamos por una matriz lo mas cercana posible a la inversa de A .

Existen dos tipos de precondicionamiento, precondicionamiento explícito e implícito. Los precondicionamientos explícitos son los que construyen la matriz M que se aproxime a la matriz A^{-1} y mientras que los precondicionadores implícitos son aquellos que no se construyen a partir de A , sino de una factorización aproximada de A , por ejemplo de la factorización incompleta LU [23].

Precondicionadores Explícitos

Supongamos que deseamos precondicionar con la matriz M el sistema

B.1. Estabilidad de un Sistema Lineal y Precondicionamiento

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ así obtener un sistema equivalente $M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Si escribimos $A = M - N$ entonces nuestro sistema queda de la forma $M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Aplicando un método iterativo estacionario, dada una aproximación de x_{k-1} obtenemos una aproximación para \mathbf{x}_k de la siguiente manera:

$$M\mathbf{x}_k = N\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$$

multiplicando por M^{-1} y además como $M^{-1}N = I - M^{-1}A$ se obtiene que

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + M^{-1}r_{k-1},$$

donde $r_{k-1} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{k-1}$.

- Si tomamos $M = D = \text{diag}(A)$, siempre y cuando la diagonal de A no tenga entradas nulas, el precondicionamiento se conoce como el método de Jacobi, es muy común en matrices de diagonal dominante.
- Si descomponemos $A = L_A + D + U_A$ donde $D = \text{diag}(A)$, L_A es la parte de A estrictamente triangular inferior y U_A es la parte estrictamente triangular superior de A , podemos definir dos métodos iterativos adicionales:
 1. $M = D + L_A$ este caso se conoce como método de Gauss-Seidel.
 2. $M = w^{-1}D + L_A$ donde $w \in (0, 2)$. En este caso el método se conoce como SOR (successive overrelaxation).

Los métodos anteriores son los más comunes para precondicionamiento explícito, de igual forma existen otras técnicas para precondicionar pero no las usaremos en este trabajo [6].

Precondicionadores Implícitos

El preconditionador mas común de este tipo es la factorización incompleta LU . Para matrices dispersas (*sparse*) es muy común realizar este tipo de factorización. La factorización se dice incompleta por que si A es dispersa, usando la factorización LU [6] usual, L y U usualmente no tiene el mismo tipo dispersión de A , debido que lo importante es tener la misma dispersión en la factorización obtenida entonces se cambian los valores de las matrices L y U no nulos por 0 que en la posición correspondiente con A son ceros, de esta manera se obtiene una factorización aproximada. Veamos el teorema que me garantiza esta factorización.

Teorema B.2. *Si $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ una matriz, entonces para cada subconjunto P de $\{(i, j) / j \neq i, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ existe una matriz triangular inferior $L = (l_{i,j})_{n \times n}$ con unos en la diagonal y una matriz triangula superior $U = (u_{i,j})$ tal que $A = LU - R$, donde $l_{i,j} = 0$, $u_{i,j} = 0$ si $i, j \in P$ y $r_{i,j} = 0$ si $(i, j) \in P$. Los factores L y U son únicos y la descomposición $A = LU - R$ es tal que LU es no singular, $(LU)^{-1} \geq 0$ y $LU \geq A$.*

A partir del teorema anterior podemos escoger $M = LU$, para preconditionar nuestro sistema [7].

Bibliografía

- [1] A. Quarteroni, *Numerical Mathematics*, Springer, Second Edition, (2007).
- [2] A. Deraemaeker, I. Babuska y P. Bouillard *Dispersion and Pollution of the FEM Solution for Helmholtz Equation in one, two and three dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **46**, (1999), 471-499.
- [3] Aki, K. y Richards, P. G., *Quantitative Seismology* (Vols. I,II). New York: W. H. Freeman and Co,(1985).
- [4] S.K. Avendaño, M.A. Ospina, J.C. Muñoz-Cuartas y H. Montegranario., *Modelling Visco Acoustic Wave Equation In Frequency Domain Using Mixed-Grid Finite-Difference Method And Attenuation-Dispersion Model Defined For Quality Factor*, Preprint.
- [5] Bosko S. y Enderee Sulo *Analysis of Finite Difference Schemes*. Springer (2014).
- [6] R. Burden *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Ninth Edition, (2011).
- [7] C. Cervantes, C. Mejía, *Precondicionamiento de Métodos Iterativos*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias, Vol.28 **106**, (2004), 49-55.

-
- [8] Z. Chen, *An optimal 9-point finite difference scheme for Helmholtz equation with PML*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, **10** (2013), 389-410.
- [9] A. Fichtner, *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*, Springer, (2011).
- [10] Jing-Bo Chen, *Laplace-Fourier-domain dispersion analysis of an average derivative optimal scheme for scalar-wave equation*, Geophysical Journal International, (2014).
- [11] Jing-Bo Chen, *An average-derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation*, Geophysics **77**, (2012), 201-210.
- [12] Churl-Hyun Jo, *An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space 2-D scalar wave extrapolator*, Geophysics **61**, (1996), 529-537.
- [13] Jing-Bo Chen, *Laplace-Fourier-domain dispersion analysis of an average derivative optimal scheme for scalar-wave equation*, Geophysical Journal International, (2014).
- [14] Jing-Bo Chen, *An average-derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation*, Geophysics **77**, (2012), 201-210.
- [15] R. Kamei, R. G. Pratt, *Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion*, Geophysical Journal International.
- [16] K. Marfurt, *Accuracy of finite-difference and finite-element modelling of the scalar and elastic wave equations*, Geophysics **49**, (1984), 533-549.
- [17] P. M. Morse y H. Feshbach *Methods of Theoretical Physics*, McGRAW-HILL, (1953).
- [18] G. Nolet, *A Breviary of seismic Tomography*, Cambridge University Press, (2007).

Bibliografía

- [19] S. Operto, J. Viriueux, *Frecuency-domain Full-waveform Inversion of global offset data*, SEISCOPE, (2006).
- [20] S. Operto, J. Viriueux, *Practical aspects of Frwquency-domain finite-difference modelling of seismic wave propagation*, SEISCOPE, (2006).
- [21] Mavko, G., T. Mukerji, and J. Dvorkin *The Rock Physics Handbook*. California: Cambridge University Press., (2009).
- [22] X. S. Raymond, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, Studies in Advanced Mathematics, CRS PRESS, (1991).
- [23] H. Sarmiento, *Precondicionamiento de Sistemas de Ecuaciones de Matrices Variables en la Modelización de Campos de Viento*, Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, (2010).
- [24] J. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* SIAM, Second Edition, (2004).
- [25] J. Virieux, V. Etienne, V. Cruz-Atienza, *Modelling Seismic Wave Propagation for Geophysical Imaging*. *Seismic Waves - Research Analysis* **13** (2012), 253 - 304.
- [26] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, SIAM, (2005).
- [27] P. Deuffhard, *Newthon Methods for Nonlinear Problems*, Springer, (2004).
- [28] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff, *Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium*, *Geophysical Journal* **93**, Pag 393-407, (1988).
- [29] J. P. Berenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, *Journal of computational physics* **114**, 185-200, (1994).